

Stoffzusammenfassung: Analysis 1 & 2

Jan Krieger

28. September 2004

INHALTSVERZEICHNIS

1 Grundlagen	4
1.1 Mathematische Symbole und grundlegende Definitionen	4
1.2 Äquivalenzrelationen und -klassen	5
1.3 Normen	5
1.4 Matrizen und Matrixnormen	7
1.5 Intervallschachtelungen	9
1.6 Eigenschaften von Teilmengen des \mathbb{K} und des \mathbb{K}^n	9
I Analysis 1: Analysis des \mathbb{K}	13
2 Folgen	14
2.1 Definition & Konvergenzbegriffe	14
2.2 Beschränkung und Häufungspunkte	15
2.3 Monotonie	16
3 Reihen	17
3.1 Definitionen und Konvergenzbegriffe	17
3.2 Konvergenzkriterien	18
3.3 Exponentialreihe	20
3.4 Doppelreihen, Produktsätze	21
4 Funktionen	22
4.1 Grundlegende Eigenschaften	22
4.2 Stetigkeit	23
4.3 Konvergenz von Funktionenfolgen	25
4.4 Der Funktionenraum $\mathcal{C}[a, b]$	25
5 Differentiation	27
5.1 Grundbegriffe	27
5.2 Mittelwertsätze und Extremalbedingungen	28
5.3 TAYLOR-Entwicklungen	29
5.4 NEWTON-Verfahren	31
5.5 Differentiation und Grenzprozesse	32

6	Integration im \mathbb{R}	34
6.1	Das RIEMANN-Integral	34
6.1.1	Herleitung und Definition	34
6.1.2	Integrabilitätskriterien	35
6.1.3	Eigenschaften des RIEMANN-Integrals	37
6.1.4	Das unbestimmte RIEMANN-Integral	37
6.1.5	Berechnung von Integralen	38
6.1.6	Kurvenlängen	39
6.2	Mittelwertsätze	40
6.3	Uneigentliche Integrale	41
6.4	Integration und Grenzprozesse	42
7	FOURIER-Analysis	43
7.1	Der Funktionenraum $\mathcal{R}[a, b]$	43
7.2	FOURIER-Entwicklung	44
II	Analysis 2: Analysis des \mathbb{K}^n	47
8	Der n-dimensionale Zahlenraum \mathbb{K}^n	48
8.1	Der euklidische Raum \mathbb{K}^n	48
8.2	Lineare Abbildungen auf dem \mathbb{K}^n	49
9	Funktionen mehrerer Veränderlicher	50
9.1	Stetigkeit	50
9.2	Vektor- und Matrixwertige Funktionen	51
9.2.1	Vektorwertige Funktionen	51
9.2.2	Matrixfunktionen	53
10	Differenzierbare Funktionen im \mathbb{K}^n	54
10.1	Partielle Ableitung	54
10.1.1	Begriffsdefinition	54
10.1.2	Begriffe der Vektoranalysis	55
10.1.3	Totale Differenzierbarkeit	56
10.1.4	Mittelwertsätze	58
10.2	TAYLOR-Entwicklung im \mathbb{R}^n	59
10.3	Satz über implizite Funktionen	60
10.4	Reguläre/umkehrbare Funktionen	62
10.5	Extremwertaufgaben	62
10.5.1	Lokale Extrema	62
10.5.2	Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen	63
11	Kurven- Flächen- und Volumenintegrale	66
11.1	Inhaltsmessung von Mengen des \mathbb{R}^n	66
11.1.1	Grundlagen	66
11.1.2	JORDAN-Inhalt	67
11.1.3	Würfelsummen	69
11.1.4	Abbildungen von Mengen	69
11.2	Das RIEMANN-Integral im \mathbb{R}^n	70

11.2.1	Definition und Grundlagen	71
11.2.2	Schranken- und Mittelwertsätze	73
11.2.3	Zusammenhang zwischen RIEMANN-Integral und JORDAN-Inhalt	73
11.2.4	Vertauschung von Grenzprozessen	74
11.2.5	Satz von FUBINI	74
11.2.6	Integraltransformationen	75
11.2.7	Uneigentliches RIEMANN-Integral	76
11.3	Parameterabhängige Integrale	76

1.1 Mathematische Symbole und grundlegende Definitionen

- **KRONECKER-Symbol** δ_{kl} :

$$\delta_{kl} := \begin{cases} 1, & k = l \\ 0, & k \neq l \end{cases}$$

- **LANDAU-Symbole** $O(\cdot)$, $o(\cdot)$: Seien f, g komplexe Funktionen in einer Umgebung von a ($a = \infty$ ist erlaubt!), so schreibt man:

$$f(x) = O(g(x)) \quad \text{für } x \rightarrow a, \quad \text{falls: } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = A \neq 0, \quad A = \text{const.}$$

und:

$$f(x) = o(g(x)) \quad \text{für } x \rightarrow a, \quad \text{falls: } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Anschaulich bedeutet $o(g)$, dass die Funktion f für $x \rightarrow a$ schneller gegen 0, als die Funktion g .

Die Schreibweise $O(g)$ bedeutet anschaulich, dass sich die Funktion f , wie die Funktion g verhält.

Als **Beispiel I** betrachte man etwa den Grenzübergang $x \rightarrow \infty$, also das asymptotische Verhalten einer Funktion. Dann ist $f(x) := \frac{1}{x^2} = o\left(\frac{1}{x}\right)$, da $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$. Allerdings ist umgekehrt $f(x) := \frac{1}{x} \neq o\left(\frac{1}{x^2}\right)$, da $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$. Die Funktion $\frac{1}{x^2}$ fällt also schneller gegen 0, als $\frac{1}{x}$.

Beispiel II: Nun betrachte man die Funktion $f(x) = \sin x$ bei Annäherung an den Nullpunkt $x \rightarrow 0$. Aufgrund der folgenden Beziehung gilt dort $\sin x = O(x)$, also verhält sich der Sinus am Nullpunkt, wie die Funktion $g(x) = x$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \neq 0.$$

- **charakteristische Funktion:** Sei D irgendeine Menge. Zu jeder Menge kann man eine *charakteristische Funktion* χ_D definieren:

$$\chi_D := \begin{cases} 1, & x \in D \\ 0, & x \notin D \end{cases}.$$

Die *partielle charakteristische Funktion* ist 1 für alle $x \in D$ und undefiniert sonst.

1.2 Äquivalenzrelationen und -klassen

- **Definition: Äquivalenzrelationen und -klassen:**

Eine Äquivalenzrelation auf einer Menge A ist eine Beziehung zwischen zwei Elementen $a, b \in A$ mit den Eigenschaften:

1. $a \sim a$ (Reflexivität)
2. $a \sim b \Rightarrow b \sim a$ (Symmetrie)
3. $a \sim b, b \sim c \Rightarrow a \sim c$ (Transitivität)

Eine Äquivalenzklasse $[a]$ ist definiert als die Menge:

$$[a] := \{x \in A \mid x \sim a\}$$

- **Satz:** Jede Menge zerfällt vollständig in disjunkte Äquivalenzklassen.

1.3 Normen

- **Definition:**

Sei V ein Vektorraum. Eine Norm $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine Abbildung mit folgenden Eigenschaften ($x, y \in V$; $\alpha \in \mathbb{R}$):

1. $\|x\| \geq 0$ und $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (Definitheit)
2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ (Homogenität)
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Dreiecksungleichung)

Ein Paar $(V, \|\cdot\|)$ wird normierter Raum genannt

- **Normäquivalenz:** Auf einem endlich dimensionalen Vektorraum \mathbb{K}^n sind alle Normen *äquivalent* zur euklidischen Norm, d.h.:

Zu jeder Norm $\|\cdot\|$ gibt es positive Konstanten $m, M > 0$, mit denen gilt:

$$m \|x\|_2 \leq \|x\| \leq M \|x\|_2$$

Als Beispiel dafür, dass die Normäquivalenz auf unendlich dimensionalen Vektorräumen nicht mehr gilt kann dienen: Wären alle Normen auf $\mathcal{C}[a, b]$ äquivalent, so müsste dieser Raum sowohl bzgl. der Maximumnorm, als auch bzgl. der L^2 -Norm vollständig sein. Somit würden

alle konvergenten Folgen von Funktionen $f_n \rightarrow f$ gegen stetige Funktionen $f \in \mathcal{C}[a, b]$ konvergieren. Man betrachte die Funktionenfolge $g_n(x) := x^n$, die bzgl. der L^2 -Norm auf $\mathcal{C}[0, 1]$ gegen die folgende Funktion konvergiert:

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}.$$

Die obige Funktion f ist aber sicher nicht stetig, also $g \notin \mathcal{C}[0, 1]$. Damit ist die Folge zwar konvergent, ihr Limes liegt aber nicht im Raum und $\mathcal{C}[0, 1]$ ist bzgl. dieser Norm nicht vollständig.

• **Beispiele für Normen auf dem \mathbb{K}^n :**

- euklidische Norm: $\|x\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$
- Maximums-Norm: $\|x\|_\infty := \max_{i=1, \dots, n} |x_i|$
- l_1 -Norm: $\|x\|_1 := \sum_{i=1}^n |x_i|^p$
- l_p -Norm: $\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$

• **wichtige Ungleichungen:**

- $\| \|x\| - \|y\| \| \leq \|x - y\|$
- **BERNOULLI'sche Ungleichung:** Für $a \in \mathbb{R}$ und $a \geq -1$ gilt für beliebiges $n \in \mathbb{N}$:

$$(1 + a)^n \geq 1 + na$$

- **YOUNG'sche Ungleichung:** Für $p, q \in \mathbb{R}$ mit $1 < p, q < \infty$ und $1/p + 1/q = 1$ gilt:

$$|xy| \leq \frac{|x|^p}{p} + \frac{|y|^q}{q}, \quad x, y \in \mathbb{K}$$

- **HÖLDER'sche Ungleichung:** Für das euklidische Skalarprodukt gilt für beliebige $p, q \in \mathbb{R}$ mit $1 < p, q < \infty$ und $1/p + 1/q = 1$:

$$|(x, y)_2| \leq \|x\|_p \cdot \|y\|_q, \quad x, y \in \mathbb{K}^n$$

Diese Ungleichung gilt auch im Grenzfall $p = 1, q = \infty$.

- **MINKOWSKI'sche Ungleichung:** Für beliebiges $p \in \mathbb{R}$ mit $1 \leq p < \infty$ sowie für $p = \infty$ gilt:

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p, \quad x, y \in \mathbb{K}^n$$

• **Abstand/Metrik:** Sei X irgend eine Menge. Eine Abbildung $d(\cdot, \cdot) : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *Metrik/Abstand* (auf X), wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- M1 Definitheit: $d(x, y) \geq 0, \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- M2 Symmetrie: $d(x, y) = d(y, x)$
- M3 Dreiecksungleichung: $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Das Paar (X, d) wird metrischer Raum genannt.

- **Abstand zu einer Menge:** Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Menge. Man definiert dann den Abstand eines Punkte $x \in \mathbb{R}^n$ zu M mit Hilfe der Metrik $d(a, b)$ als:

$$\text{dist}(x, M) := \inf\{d(x, m) \in \mathbb{R} \mid m \in M\}.$$

$\text{dist}(x, M)$ ist also der kleinste Abstand, von x zu einem Punkt $m \in M$ der Menge.

1.4 Matrizen und Matrixnormen

- **Matrixnormen:** Da man den Raum $\mathbb{K}^{n \times n}$ der $n \times n$ -Matrizen mit dem \mathbb{K}^{2n} identifizieren kann, so kann man auch Normen für Matrizen definieren, für die alle gewöhnlichen Normeigenschaften gelten; insbesondere auch die Normäquivalenz auf $\mathbb{K}^{n \times n}$. Der Begriff der Konvergenz wird dann komponentenweise erklärt.

Natürliche Matrixnorm: Für eine beliebige Vektornorm $\|\cdot\|$ auf \mathbb{K}^n wird durch folgende Setzung eine Matrixnorm erklärt:

$$\|A\| := \sup_{x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{x \in \mathbb{K}^n, \|x\|=1} \|Ax\|$$

Für solche *natürlich* erzeugte Matrixnormen gilt:

1. $\|E_n\| = 1$.
2. $\underbrace{\|Ax\|}_{\text{Matrixnorm}} \leq \underbrace{\|A\|}_{\text{Matrixnorm}} \cdot \underbrace{\|x\|}_{\text{Vektornorm}}$, $x \in \mathbb{K}^n$, $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$.
3. $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$, $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$

Nicht jede Matrixnorm ist auch *natürlich*. Für die FROBENIUS-Norm gelten nur die obigen Eigenschaften 1 und 2. Zusätzlich gilt $\|E_n\|_F = \sqrt{n}$. Sie ist definiert durch:

$$\|A\|_F := \sqrt{\sum_{j,k=1}^n |a_{jk}|^2}.$$

- **Natürliche Matrixnormen:** Die natürlichen Matrixnormen zur Maximumsorm $\|\cdot\|_\infty$ und zur l_1 -Norm $\|\cdot\|_1$ sind die sog. *Maximale-Zeilensummen-Norm* und die *Maximale-Spaltensummen-Norm*:

$$\|A\|_\infty := \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{k=1}^n |a_{jk}|$$

$$\|A\|_1 := \max_{1 \leq k \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{jk}|$$

- **Spektralnorm:** Für hermite'sche Matrizen ($A = {}^t\bar{A}$) gilt für die *Spektralnorm* $\|\cdot\|_2$:

$$\|A\|_2 = \max\{|\lambda|, \lambda \text{ Eigenwert von } A\}$$

Für allgemeine Matrizen $B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ gilt:

$$\|B\|_2 = \max \left\{ \sqrt{|\lambda|}, \lambda \text{ Eigenwert von } {}^t\bar{A}A \right\}$$

Zur Motivation der Spektralnorm: Sei $w \neq 0$ ein normierter Eigenvektor zum Eigenwert λ der Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$, also:

$$\|w\| = 1 \quad \text{und} \quad A \cdot w = \lambda w.$$

Damit erhält man folgende Abschätzung:

$$|\lambda| = |\lambda| \cdot \|w\| = \|A \cdot w\| \leq \|A\| \cdot \|w\| = \|A\|.$$

Das bedeutet, dass alle Eigenwerte auf einer Kreisscheibe um den Nullpunkt in \mathbb{C} liegen. Der Radius ist gerade $\|A\|$. Damit erhält man:

$$\max_{\lambda \text{ ist EW}} |\lambda| \leq \|A\|_\infty.$$

• **spezielle Matrizen aus $\mathbb{K}^{n \times n}$:**

1. **HERMITE'sche Matrizen:** Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ heißt hermite'sch, wenn gilt:

$$A = {}^t\bar{A}.$$

– Für hermite'sche Matrizen hat die Spektralnorm die spezielle Gestalt:

$$\|A\|_2 = \max \{ |\lambda|, \lambda \text{ Eigenwert von } A \}$$

– Alle Eigenwerte einer hermite'schen Matrix sind reell.

– Zu jeder hermite'schen Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ gibt es eine Orthonormalbasis von \mathbb{K}^n , die aus Eigenvektoren von A besteht. Außerdem gibt es eine unitäre Matrix $S \in \mathbb{K}^{n \times n}$ mit der gilt ($\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ Eigenwerte von A):

$$S^{-1}AS = {}^t\bar{S}AS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

2. **orthogonale Matrizen:** Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ heißt orthogonal, wenn ihre Spaltenvektoren ein Orthogonalsystem bilden. Es gilt:

$$A^{-1} = {}^tA.$$

– Für alle Eigenwerte $\lambda_i \in \mathbb{C}$ gilt: $|\lambda_i| = 1$.

3. **unitäre Matrizen:** Eine Matrix $Q \in \mathbb{K}^{n \times n}$ heißt unitär, wenn gilt:

$$Q^{-1} = {}^t\bar{Q}.$$

– Für alle Eigenwerte $\lambda_i \in \mathbb{C}$ gilt: $|\lambda_i| = 1$.

- Zu jeder unitären Matrix $Q \in \mathbb{K}^{n \times n}$ gibt es eine unitäre Matrix $S \in \mathbb{K}^{n \times n}$, so dass $(\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ Eigenwerte von A):

$$S^{-1}QS = {}^t\bar{S}QS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Die Matrix S besteht aus einer Basis von Eigenvektoren.

- unitäre Matrizen $Q, Q_1, Q_2 \in \mathbb{K}^{n \times n}$ sind insbesondere regulär (voller Rang) und es gilt:

$$\begin{aligned} \|Qx\| &= \|Q\| \Rightarrow \|Q\| = 1 \\ (Qx, Qy)_2 &= (x, y)_2, \quad x, y \in \mathbb{K}^n. \end{aligned}$$

- **Positiv Definit für Matrizen:** Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ heißt *positiv definit*, wenn gilt:

$$(Ax, x)_2 \in \mathbb{R}, \quad (Ax, x)_2 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$$

Eine hermite'sche Matrix ist genau dann positiv definit, wenn alle ihre (reellen) Eigenwerte positiv sind.

- **Störungssatz:** Die Matrix $B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ habe die Norm $\|B\| < 1$. Dann ist die Matrix $E_n + B$ regulär und es gilt:

$$\|(E_n + B)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|B\|}$$

- Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ regulär und $B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ mit $\|A^{-1}B\| < 1$. Dann ist auch $A + B$ regulär

1.5 Intervallschachtelungen

- **Definition:**

Eine Intervallschachtelung ist eine Folge von (abgeschlossenen) Intervallen $I_n := [a_n, b_n]$ mit:

1. $I_{n+1} \subset I_n$
2. Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein Intervall I_n mit Länge $|b_n - a_n| < \epsilon$.

- **Intervallschachtelungseigenschaft:**

Zu jeder Intervallschachtelung I_n in \mathbb{R} gibt es ein $a \in \mathbb{R}$ mit: $a \in I_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

- **Trennungseigenschaft des \mathbb{R} :**

Zu zwei Teilmengen $A, B \subset \mathbb{R}$ mit $a \leq b, \quad \forall a \in A, \quad b \in B$ gibt es ein $s \in \mathbb{R}$, dass a und B trennt, d.h. $a \leq s \leq b, \quad \forall a \in A, \quad b \in B$.

Die Trennungseigenschaft ist zur Vollständigkeit von \mathbb{R} äquivalent

1.6 Eigenschaften von Teilmengen des \mathbb{K} und des \mathbb{K}^n

- **Durchmesser einer Menge:** Für Eine Menge $M \subset \mathbb{K}^n$ ist ihr Durchmesser definiert als:

$$\text{diam}(M) := \sup \{\|x - y\|_2, \quad x, y \in M\}.$$

- **ϵ -Umgebungen/Kugelumgebung eines Punktes:** Eine Epsilonumgebung $U_\epsilon(x_0)$ für ein $x_0 \in D \subset \mathbb{K}^n$ mit dem Radius $\epsilon > 0$ ist definiert, als die offene Kreisscheibe:

$$U_\epsilon(x_0) = K_\epsilon(x_0) := \{x \in D \mid \|x - x_0\| < \epsilon\}$$

- **ϵ -Umgebung einer Menge:** Als *offene ϵ -Umgebung* einer Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ bezeichnet man die Menge:

$$U_\epsilon(M) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \text{dist}(x, M) < \epsilon\}.$$

- **Satz zu Umgebungen:** Es gilt:

1. Jede Obermenge einer Umgebung von $a \in \mathbb{K}^n$ ist eine Umgebung von a .
2. Der Durchschnitt zweier Umgebungen von $a \in \mathbb{K}^n$ ist ebenfalls eine Umgeung von a .
3. **HAUSDORFF'sche Trennungseigenschaft:** Zu je zwei verschiedenen Punkten $a, b \in \mathbb{K}^n$ existieren disjunkte Umgebungen.

- **beschränkte Mengen:**

Eine Menge $M \subset \mathbb{K}$ heißt *beschränkt*, wenn es eine Zahl $R > 0$ gibt, sodass $|z| \leq R$ für fast alle $z \in M$.

Eine Menge $M \subset \mathbb{K}^n$ heißt *beschränkt*, wenn es eine Kugelumgebung $K_r(0)$ des Nullpunktes gibt, die alle Elemente der Menge enthält.

- **offene Mengen:**

Eine Menge heißt *offen*, wenn es zu jedem $a \in O$ eine Kugelumgebung $K_\epsilon(a)$ gibt, die in O enthalten ist.

Dies bedeutet, dass es keine sog. Randpunkte gibt, deren Kugelumgebungen zum Teil in O und zum Teil im Komplement von O liegen.

Lemma: Der Durchschnitt endlich vieler und die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen ist offen.

- **abgeschlossene Mengen:**

Eine Menge $M \subset \mathbb{K}^n$ heißt *abgeschlossen*, wenn sie die Granzwerte aller konvergenten Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n \in M$ enthält. Auch die leere Menge \emptyset heißt abgeschlossen.

Eine weitere Definition ist: Eine Menge $A \subset \mathbb{K}^n$ heißt *abgeschlossen*, wenn ihr Komplement $A^c := \mathbb{K}^n \setminus A$ offen ist.

Beispiele: Die folgenden Mengen sind abgeschlossen:

1. die berandete Kreisscheibe mit dem Radius r um a : $\bar{K}_r(a) := \{z \in \mathbb{C}^n \mid \|z - a\| \leq r\}$
2. Das CANTOR'sche Diskontinuum ist abgeschlossen, und sogar kompakt.
3. *Gegenbeispiel:* \mathbb{Q} ist nicht abgeschlossen, da z.B. die Folge $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \in \mathbb{Q}$ gegen die Eueler'sche Zahl e konvergiert und $e \notin \mathbb{Q}$. Damit gibt es Folgen in \mathbb{Q} deren Grenzwert nicht in \mathbb{Q} liegt.

Die Mengen \emptyset und \mathbb{K}^n sind zugleich offen und abgeschlossen.

Die diskrete Menge $\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$ ist weder offen noch abgeschlossen.

Lemma: Die Vereinigung endlich vieler und der Durchschnitt beliebig vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.

- **Rand einer Menge:** Ein Punkt $a \in \mathbb{K}^n$ heißt *Randpunkt* einer Menge $M \subset \mathbb{K}^n$, wenn jede Umgebung von a Punkte sowohl aus M , als auch aus dem Komplement $M^c := \mathbb{K}^n \setminus M$ enthält.

Die Menge aller Randpunkte aus M wird mit ∂M bezeichnet. Aus Symmetriegründen gilt $\partial M = \partial(M^c)$. Jeder Randpunkt von M ist also zugleich Limes von Punktfolgen in M und M^c .

Der Rand einer jeden Menge $M \subset \mathbb{K}^n$ ist abgeschlossen.

- **offener Kern von Mengen:** Für eine Menge $M \subset \mathbb{K}^n$ ist der *offene Kern*, oder das *Innere* definiert als:

$$M^\circ := M \setminus \partial M.$$

Es gilt: Die Menge M° ist offen. Jede offene Teilmenge $O \subset M$ ist in M° enthalten.

Das Innere M° einer Menge $M \subset \mathbb{K}^n$ ist die größte offene Menge, die in M liegt.

- **Anschluss einer Menge:**

Der Abschluss einer Menge $M \subset \mathbb{K}$ wird mit \overline{M} bezeichnet und ist folgendermaßen definiert:

$$\overline{M} := \left\{ x \in \mathbb{K} \mid \exists (a_n)_{n \in \mathbb{N}}, a_n \in M : x = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right\}$$

Für Mengen $M \subset \mathbb{K}^n$ ist der *Abschluss*, bzw. die *abgeschlossene Hülle* definiert als:

$$\overline{M} := M \cup \partial M$$

Es gilt: \overline{M} ist abgeschlossen. Jede abgeschlossene Menge A , mit $M \subset A$ enthält \overline{M} .

Der Abschluss \overline{M} ist die kleinste abgeschlossene Menge, die M enthält.

Beispiele: Der Rand von \mathbb{Q}^n in \mathbb{K}^n ist der ganze \mathbb{K}^n . Der Rand von \mathbb{K}^n ist leer. Der Rand der Kugelumgebung $K_r(0)$ ist: $\partial K_r(0) := \{x \in \mathbb{K}^n \mid \|x - 0\|_2 = r\}$.

- Eine Menge $O \subset \mathbb{K}^n$ ist genau dann *offen*, wenn sie keinen ihrer Randpunkte enthält.
- Eine Menge $A \subset \mathbb{K}^n$ ist genau dann *abgeschlossen*, wenn sie alle ihre Randpunkte enthält.
- **kompakte Mengen:** Eine Menge $M \subset \mathbb{K}$ heißt *kompakt*, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist. Auch die leere Menge \emptyset heißt kompakt.

Eine Menge $M \subset \mathbb{K}^n$ heißt *kompakt* (bzw. *folgenkompakt*), wenn jede Folge in M einen Häufungspunkt in M besitzt.

zusätzlich gilt: Der Durchschnitt $A \cap K$ einer abgeschlossenen Menge A und einer kompakten Menge K ist kompakt.

Beispiele: Eine abgeschlossene Kugel $\overline{K}_r(a)$ und der Rand einer beschränkten Menge ∂M sind kompakt. Eine endliche Menge ist kompakt

- **HEINE-BOREL'sche Überdeckungseigenschaft:** Sei I eine Indexmenge, X ein metrischer Raum und $K \subset X$. Aus jeder Familie $\{U_i\}_{i \in I}$ offener Mengen in X mit $K \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ können endlich viele U_{i_1}, \dots, U_{i_r} ausgewählt werden, so dass gilt:

$$K \subset U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_r}.$$

- **Satz von HEINE-BOREL:** Für eine Teilmenge $M \subset \mathbb{K}^n$ sind folgende Aussagen äquivalent:
 1. M ist folgen-kompakt.
 2. M ist beschränkt und abgeschlossen.
 3. Jede offene Überdeckung von M enthält eine endliche Überdeckung.

Diese Charakterisierung von kompakt ist nur für endlich-dimensionale Vektorräume möglich. In unendlich dimensionalen VRs, wie dem $\mathcal{C}[a, b]$ sind zusätzliche Eigenschaften nötig, um die Kompaktheit von beschränkten und abgeschlossenen Mengen nachzuweisen.

- **BOLZANO-WEIERSTRASS-Charakterisierung:** Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{K}$ ist genau dann kompakt, wenn jede Folge in M eine Teilfolge besitzt, die gegen einen Punkt in M konvergiert.
- Das Bild $f(M)$ einer kompakten Menge $M \subset \mathbb{K}$ unter einer stetigen Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{K}$ ist ebenfalls kompakt.
- Jede abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge in \mathbb{K}^n ist ebenfalls kompakt.
- **vollständige Räume:** Ein Vektorraum heißt vollständig, wenn alle Cauchyfolgen ihren Grenzwert in diesem Raum haben.
- **BANACH-Raum:** Ein normierter (mit einer Norm versehener), vollständiger Vektorraum heißt *BANACH-Raum*.
- **relativ offene Mengen:** Eine Teilmenge $M \subset G \subset \mathbb{K}^n$ heißt *relativ offen bzgl. G*, wenn zu jedem Punkt $a \in M$ eine Kugelumgebung $K_r(a)$ existiert, mit $K_r(a) \cap G \subset M$.
- **zusammenhängende Mengen:** Eine offene Menge $G \subset \mathbb{K}^n$ heißt *zusammenhängend*, wenn es keine relativ-offene Zerlegung $G = U \cup V$ gibt, mit $U, V \neq \emptyset$ und $U \cap V = \emptyset$. Eine offene und weg-zusammenhängende Menge $G \subset \mathbb{K}^n$ heißt *Gebiet*.
- **Lebesgue-Nullmenge:** Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$ heißt *Lebesgue-Nullmenge*, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ höchstens abzählbar unendlich viele abgeschlossene (oder offene) Intervalle I_1, I_2, \dots gibt, so dass gilt:

$$M \subset \bigcup_k I_k, \quad \sum_k |I_k| \leq \epsilon.$$

Eine Eigenschaft gilt *fast überall*, wenn sie überall bis auf eine Nullmenge gilt.

Teil I

Analysis 1: Analysis des \mathbb{K}

2.1 Definition & Konvergenzbegriffe

- **ϵ -Konvergenz:**

Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **konvergiert gegen einen Limes** a ($\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$) genau dann, wenn:

$$\forall \epsilon > 0 \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \epsilon \text{ f\"ur } n > N_\epsilon$$

- **Cauchy-Folge (CF):**

Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt Cauchy-Folge, wenn:

$$\forall \epsilon > 0 \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} : |a_n - a_m| < \epsilon \text{ f\"ur } n, m > N_\epsilon$$

- **Sätze über Folgen:**

1. Jede konvergente Folge ist auch Cauchy-Folge.
2. Jede Cauchy-Folge ist beschränkt.
3. Jede Cauchy-Folge über \mathbb{R} hat einen Limes in \mathbb{R} (\mathbb{R} ist vollständig)

Proof. 1. Es gelte $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. Dann gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, sodass für $n, m > N$:

$$|a_n - a| < \frac{1}{2}\epsilon, \quad |a_m - a| < \frac{1}{2}\epsilon$$

Daraus ergibt sich mit der Dreiecksungleichung:

$$|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \leq |a_n - a| + |a_m - a| < \frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{2}\epsilon = \epsilon$$

2. aus einer unbeschränkten Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ kann man eine divergente Teilfolge auswählen, aus der man eine weitere Teilfolge (a_{n_k}) erhält mit $a_{n_{k+1}} > 2 \cdot a_{n_k}$. Damit gilt dann:

$$|a_{n_{k+1}} - a_{n_k}| \geq |a_{n_{k+1}}| - |a_{n_k}| > |a_{n_{k+1}} - a_{n_k}| \rightarrow \infty$$

□

- Es gilt: Folge konvergiert auf $\mathbb{K} \Leftrightarrow$ Folge ist Cauchy-Folge.
- Der Limes einer konvergenten Folge ist eindeutig bestimmt.
- Werden bei einer konvergenten Folge nur endlich viele Glieder geändert, so bleibt sie konvergent.
- Jede konvergente Folge ist notwendigerweise beschränkt.
- Gilt für eine Folge $a_n \geq 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$, so folgt $\lim a_n \geq 0$ (Für $>$ gilt dies nicht unbedingt!).
- Für zwei konvergierende Folgen mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ existieren auch folgende Grenzwerte:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$$

Für den letzten Grenzwert ist noch $b_n \neq 0$ für fast alle b_n und $b \neq 0$ notwendig.

- Für konvergente Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf \mathbb{K} mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a| \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re} a_n = \operatorname{Re} a \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Im} a_n = \operatorname{Im} a$$

- **Beispiel:** Konvergenz einiger Folgen:

$$\begin{array}{ll} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} = 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0 \quad 0 \leq q < 1 & \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c} = \lim_{n \rightarrow \infty} c^{1/n} = 1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1 & \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = \infty \end{array}$$

2.2 Beschränkung und Häufungspunkte

- **beschränkte Folgen:**

Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (oder Teilmenge) heißt beschränkt, falls:

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists K \in \mathbb{R}_+ : |a_n| < K$$

Entsprechend definiert man Beschränktheit nach oben bzw. unten:

$$a_n \leq K \quad \text{bzw.} \quad a_n \geq K \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

- Eine beschränkte Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{R} besitzt eine obere, sowie eine untere Grenze:

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} a_n := \min \{K \in \mathbb{R} \mid a_n \leq K \quad \forall n \in \mathbb{N}\} \quad \inf_{n \in \mathbb{N}} a_n := \max \{K \in \mathbb{R} \mid a_n \geq K \quad \forall n \in \mathbb{N}\}$$

Mit diesen gilt dann: $\sup_{n \in \mathbb{N}} a_n \leq a_n \leq \inf_{n \in \mathbb{N}} a_n$.

- **Häufungspunkte (HP):**

Ein a heißt Häufungspunkt einer Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, falls es in jeder ϵ -Umgebung $U_\epsilon(a)$ unendlich viele Folgenglieder a_n gibt

- Für Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit HP a gilt:
 - Zu jedem Häufungspunkt a gibt es eine konvergente Teilfolge (a_{n_k}) mit $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$.
 - Ein HP a ändert sich nicht, wenn man endlich viele Elemente a_n ändert.
 - Eine konvergente Folge mit Limes b hat genau einen HP, der mit b identisch ist.
- **Satz von Bolzano Weierstraß:**
 1. Jede beschränkte Folge oder unendliche Teilmenge in \mathbb{K} besitzt einen HP.
 2. Jede beschränkte Folge oder unendliche Teilmenge in \mathbb{R} besitzt einen größten und einen kleinsten HP, die mit $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$, bzw. $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$ bezeichnet werden.
- **Def: abgeschlossen und kompakt**
 - Eine Menge $M \subset \mathbb{K}$ heißt *abgeschlossen*, falls alle ihre Häufungspunkte ebenfalls in M liegen.
 - Eine abgeschlossene Teilmenge $M \subset \mathbb{K}$ heißt *kompakt* wenn jede (unendliche) Folge in ihr einen HP hat.

Damit besagt der Satz von Bolzano-Weierstraß, dass in \mathbb{K} jede beschränkte, abgeschlossene Teilmenge kompakt ist

- Jede beschränkte Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ über \mathbb{K} , die nicht konvergiert besitzt mindestens zwei Häufungspunkte. Nicht-beschränkte Folgen können auch eine divergente Teilfolge besitzen.

2.3 Monotonie

- **Definition der Monotonie:**
Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt monoton steigen (fallend), falls gilt:

$$a_{n+1} \geq a_n \quad \text{bzw.} \quad a_{n+1} \leq a_n \quad (n \in \mathbb{N})$$

- Jede beschränkte, monoton steigende oder fallende Folge in \mathbb{R} besitzt einen Grenzwert.

3.1 Definitionen und Konvergenzbegriffe

- Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt **konvergent** mit Limes s_{∞} , wenn die Folge ihrer Partialsummen gegen s_{∞} konvergiert:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k = s_{\infty}$$

- Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt **absolut konvergent**, wenn die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.
- Die Untersuchung von Folgen kann in die Untersuchung von Reihen eingebettet werden, indem man setzt:

$$a_n = a_1 + (a_2 - a_1) + \dots + (a_n - a_{n-1}) = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k)$$

- **Reihenkonvergenz:** Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ kann nur dann konvergieren, wenn ihre Partialsummen beschränkt sind und ihre Glieder a_k eine Nullfolge bilden ($\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$).
- Für zwei konvergente Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ sind auch alle **Linearkombinationen** konvergent:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha a_k + \beta b_k = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \beta \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

- Eine absolut konvergente Reihe ist auch konvergent, da

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$$

- **Beispiele:**

1. Die **geometrische Reihe** $\sum_{k=1}^{\infty} x^k$ mit festem $x \in \mathbb{K}$ und $x \neq 1$ konvergiert für $|x| \leq 1$ gegen $\frac{1}{1-x}$
2. Die **harmonische Reihe** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ ist streng divergent.
3. $\sum_{k=1}^{\infty} k = \infty$.
4. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k = \begin{cases} -1 & n \text{ ungerade} \\ 0 & n \text{ gerade} \end{cases}$ ist divergent.

3.2 Konvergenzkriterien

- **CAUCHY-Konvergenzkriterium:** Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert genau dann, wenn gilt:

$$\forall \epsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \left| \sum_{k=m}^n a_k \right| < \epsilon \quad \forall n \geq m \geq N$$

Dieser Konvergenzbegriff folgt direkt aus der CAUCHY-Konvergenz von Folgen.

- **Reihen mit nichtnegativen Gliedern:** Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ in \mathbb{R} mit $a_k \geq 0$ ist genau dann konvergent, wenn ihre Partialsummen beschränkt sind. (Beweisidee: Folge der Partialsummen ist monoton wachsend und n.V. beschränkt \Rightarrow Konvergenz)
- **Leibniz-Kriterium:** Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt alternierend, falls die Vorzeichen ihrer Glieder alternieren. Eine solche Reihe ist konvergent, wenn die Absolutbeträge ihrer Glieder eine monoton fallende Nullfolge bilden ($|a_n| \geq |a_{n+1}| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$)).
- **Beispiele:** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \ln(2)$ $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{k+1}} = \frac{\pi}{4}$
- **Dirichlet-Kriterium:** Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ habe beschränkte Partialsummen und die Folge (b_k) sei eine monoton fallende Nullfolge. Dann konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$.
Mit der Setzung $a_k = (-1)^k$ ergibt sich das Leibniz-Kriterium.
- **Vergleichs-Kriterium:** Sei $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ eine konvergente Reihe mit $c_n \geq 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$.

1. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert absolut, genau dann wenn mit einer Konstante $\kappa > 0$ gilt:

$$|a_n| \leq \kappa c_n \quad \text{für fast alle } n \in \mathbb{N}$$

Da die Folge $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt, folgt hier aus der Konvergenz von $\sum_n c_n$ die Konvergenz von $\sum_n a_n$. Die Divergenz von $\sum_n a_n$ impliziert die Divergenz von $\sum_n c_n$.

2. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert absolut, genau dann wenn:

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \leq \frac{c_{k+1}}{c_k} \quad \text{für fast alle } n \in \mathbb{N}$$

Aus der Divergenz von $\sum_n a_n$ folgt ebenfalls die Divergenz von $\sum_n c_n$.

- **Quotientenkriterium:** Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Reihe mit $a_n \neq 0$ für alle $n \geq N_0$. Es gebe eine reelle Zahl θ mit $0 < \theta < 1$, so dass

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq \theta < 1 \quad \text{für alle } n > N_0$$

Dann konvergiert die Reihe $\sum_n a_n$ absolut.

Beispiel: Die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ folgt aus dem Quotientenkriterium.

- **Wurzelkriterium:** Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert absolut, wenn es ein $0 < \theta < 1$ und ein $N_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $n \geq N_0$ gilt:

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq \theta < 1.$$

Sie divergiert absolut, wenn für alle $n \geq N_0$ gilt:

$$\sqrt[n]{|a_n|} > 1$$

- **Beispiel: Wurzelkriterium ist stärker als das Quotientenkriterium:**

Man betrachte die folgende Reihe $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

$$a_n := \begin{cases} 2^{-n} & n \text{ gerade} \\ 3^{-n} & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Für das Wurzelkriterium und Quotientenkriterium erhält man je zwei Fälle, nur das Wurzelkriterium impliziert mit diesen Fällen auch die Konvergenz:

– Quotientenkriterium:

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \begin{cases} \left| \frac{2^{-(n+1)}}{3^{-n}} \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| \frac{3^n}{2^n} \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| \frac{3^n}{2^n} \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| \frac{3}{2} \right|^n \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty), \\ \left| \frac{3^{-(n+1)}}{2^{-n}} \right| = \frac{1}{3} \cdot \left| \frac{2^n}{3^n} \right| = \frac{1}{3} \cdot \left| \frac{2^n}{3^n} \right| = \frac{1}{3} \cdot \left| \frac{2}{3} \right|^n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty). \end{cases}$$

– Wurzelkriterium:

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} \sqrt[n]{2^{-n}} = \frac{1}{2} < 1 \\ \sqrt[n]{3^{-n}} = \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < 1 \end{cases}$$

- **Potenzreihe:** Eine Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$$

konvergiert absolut für alle Argumente $x \in \mathbb{K}$ mit der Eigenschaft

$$|x - x_0| < R := \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}};$$

Für $|x - x_0| > R$ ist sie divergent. Die Grenze R heißt *Konvergenzradius* der Reihe.

- **Umordnungssatz:** Für eine absolut konvergente Reihe $s_{\infty} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert auch jede Umordnung absolut gegen den selben Limes.

Als Beispiel dafür, dass der Umordnungssatz nur bei absoluter Konvergenz gilt, betrachte man die alternierende harmonische Reihe:

$$s_{\infty} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

Ihr Limes ändert sich, wenn man jeweils drei aufeinanderfolgende Glieder zusammenfasst.

3.3 Exponentialreihe

Die sog. **Exponentialreihe**

$$\exp(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

ist eine Potenzreihe. Ihr Konvergenzradius ergibt sich zu:

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|1/n!|}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = \infty.$$

EULER'sche Zahl e : Es gilt:

$$\exp(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Eigenschaften: Die Exponentialreihe hat folgende Eigenschaften:

1. $\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$
2. $\exp(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
3. $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

3.4 Doppelreihen, Produktsätze

- **CAUCHY'scher Doppelreihensatz:** Ist die Doppelreihe

$$s_{\infty} = \sum_{j,k=1}^{\infty} a_{jk}$$

bzgl einer Reihenfolge der Summation absolut konvergent, so ist jede ihrer Zeilen- und Spaltenreihen

$$s_{\infty}^{(j)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk}, \quad s_{\infty}^{(k)} = \sum_{j=1}^{\infty} a_{jk}$$

absolut konvergent und die Reihenfolge der Summation ist für den Limes irrelevant.

- **CAUCHY-Produkt:** Für zwei absolut konvergente Reihen $\sum a_k$ und $\sum b_k$ ist die Produktreihe mit den folgenden Elementen ebenfalls absolut konvergent und es gilt:

$$c_n := a_1 b_{n-1} \cdot \dots \cdot a_{n-1} b_1; \quad \sum_{k=1}^{\infty} c_k = \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k \right)$$

4.1 Grundlegende Eigenschaften

- **Periodizität:** Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ heißt *periodisch* mit Periode L , wenn gilt:

$$f(x + n \cdot L) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}.$$

- **Gerade/Ungerade Funktionen:** Eine Funktion heißt *gerade*, wenn $f(-x) = f(x)$. Sie heißt *ungerade*, wenn $f(-x) = -f(x)$.
- **Monotonie:** Eine reelle Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *monoton steigend* bzw. *monoton fallend*, wenn für Punkte $x_1, x_2 \in I$ gilt:

$$x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \quad \text{bzw.} \quad x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2).$$

- **Satz über monotone Funktionen und ihre Umkehrfunktionen:** Für eine strikt monoton steigende (fallende) Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ existiert auf dem Bild $B = \{y \in \mathbb{R} \mid y = f(x), x \in I\}$ die Umkehrfunktion $f^{-1} : B \rightarrow I$ und ist ebenfalls strikt monoton steigend (fallend).
- **Limes einer Funktion:** Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{K}$ hat einen (regulären) Limes $a \in \mathbb{K}$ in einem Punkt $x_0 \in \overline{D}$, wenn für alle Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \in D \quad \forall n \in \mathbb{N}$, gilt:

$$x_n \rightarrow x_0 \quad (n \rightarrow \infty) \quad \Rightarrow \quad f(x_n) \rightarrow a \quad (n \rightarrow \infty)$$

- **Supremum und Infimum einer Funktion:** Für eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ sind *Supremum* und *Infimum* definiert als kleinste obere, bzw. größte untere Grenze ihrer Bildmenge:

$$\begin{aligned} \sup_{x \in D} f(x) &:= \min\{\beta \in \mathbb{R} \mid f(x) \leq \beta \quad \forall x \in D\} \\ \inf_{x \in D} f(x) &:= \max\{\alpha \in \mathbb{R} \mid f(x) \geq \alpha \quad \forall x \in D\} \end{aligned}$$

Auf einem beschränkten D garantiert die Trennungseigenschaft von \mathbb{R} die Existenz von \sup bzw. \inf .

Existieren Punkte $x_{\max}, x_{\min} \in D$ mit:

$$\begin{aligned} \sup_{x \in D} f(x) &= f(x_{\max}) =: \max_{x \in D} f(x) \\ \inf_{x \in D} f(x) &= f(x_{\min}) =: \min_{x \in D} f(x) \end{aligned}$$

so spricht man von einem *Maximum* der *Minimum* von f .

- **Konvexität:** Eine Funktion ist Konvex auf (a, b) , wenn die Sekante durch $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ oberhalb des Funktionsgraphen liegt. Diese Gerade hat die Funktionsgleichung:

$$L(x, a, b) := \frac{b-x}{b-a}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b)$$

Damit lässt sich die Konvexitätsbedingung auch formulieren als

$$f(x) \leq L(x, r_l, r_r) \quad \forall r_l, x, r_r \in (a, b) \text{ mit } r_l < x < r_r$$

Da die Punkte $x \in (a, b)$ genau die Punkte $b + \lambda \cdot (a - b) = \lambda a + (1 - \lambda)b \quad \forall \lambda \in (0, 1)$ sind, gilt bei Konvexität:

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

4.2 Stetigkeit

- **Stetigkeit einer Funktion:** Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{K}$ heißt *stetig* in einem Punkt $x_0 \in D$, wenn für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D$ gilt:

$$x_n \rightarrow x_0 \quad (n \rightarrow \infty) \quad \Rightarrow \quad f(x_n) \rightarrow f(x_0) \quad (n \rightarrow \infty)$$

Sie heißt stetig auf einer Menge $M \subseteq D$, wenn sie stetig in jedem Punkt $x_0 \in D$ ist.

- **Stetigkeit per ϵ/δ -Argument:** Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{K}$ heißt *stetig* in einem Punkt $x_0 \in D$, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta_\epsilon > 0$ gibt, so dass für alle $x \in D$ gilt:

$$|x - x_0| \leq \delta_\epsilon \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

In Quantorenschreibweise:

$$\forall \epsilon > 0 : \exists \delta_\epsilon > 0 : \forall x \in D : (|x - x_0| \leq \delta_\epsilon \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \epsilon).$$

- Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{K}$ sei in einem Punkt $x_0 \in D$ stetig und es gelte $f(x_0) \neq 0$. Dann gibt es eine ϵ -Umgebung $U_\epsilon(x_0)$ derart, dass $f(x) \neq 0$ für alle $x \in U_\epsilon(x_0)$.

- **Eigenschaften stetiger Funktionen:**

1. Für eine stetige Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{K}$ ist auch jede Restriktion $f' : D' \rightarrow \mathbb{K}$ auf ein $D' \subset D$ stetig.
2. Für eine in $x_0 \in D$ stetige Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{K}$ sind auch $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$, $|f|$, $\sqrt[n]{f}$ stetig.
3. Für in $x_0 \in D$ stetige Funktionen $f, g : D \rightarrow \mathbb{K}$ sind auch $f \cdot g$ und $f + g$ stetig. Ist weiter $g(x_0) \neq 0$, so ist auch f/g stetig.
4. Für eine in $x_0 \in D$ stetige Funktion $f : D \rightarrow B \subset \mathbb{K}$ und eine in $f(x_0) \in B$ stetige Funktion $g : B \rightarrow \mathbb{K}$ ist auch ihre Komposition $g \circ f : D \rightarrow \mathbb{K}$ stetig in x_0 .

Dieses Lemma zeigt, dass die auf einem beschränkten Intervall stetigen Funktionen einen Vektorraum bilden. Dieser wird mit $\mathcal{C}[a, b]$ bezeichnet. Siehe hierzu den Abschnitt 4.4.

- **Satz über die Umkehrfunktion stetiger Funktionen:** Sei $D \subset \mathbb{K}$ beschränkt und abgeschlossen, also kompakt. Weiter sei eine Funktion $f : D \rightarrow B \subset \mathbb{K}$ injektiv und stetig. Dann ist auch ihre Umkehrfunktion $f^{-1} : B \rightarrow D$ stetig.
- **Zwischenwertsatz:** Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine reelle stetige Funktion. Dann gibt es zu jeder reellen Zahl $f(a) \leq y \leq f(b)$ ein $c \in [a, b]$ mit $f(c) = y$.
- **Satz von der Beschränktheit:** Eine auf einer beschränkten, abgeschlossenen (also kompakten) Teilmenge $D \subset \mathbb{K}$ stetige Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{K}$ ist dort beschränkt, d.h.:

$$\exists K > 0 : \sup_{x \in D} |f(x)| \leq K$$

- **Satz vom Exremum:** Eine auf einer kompakten Teilmenge $D \subset \mathbb{K}$ stetige reell-wertige Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ besitzt dort ein Maximum und ein Minimum, d.h.:

$$\exists x_{\min}, x_{\max} \in D : \sup_{x \in D} f(x) = \max_{x \in D} f(x) = f(x_{\max}), \quad \inf_{x \in D} f(x) = \min_{x \in D} f(x) = f(x_{\min})$$

- **gleichmäßige Stetigkeit:** Eine auf einer kompakten Teilmenge $D \subset \mathbb{K}$ stetige Funktion ist dort *gleichmäßig stetig*, d.h.:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta_\epsilon > 0 : \forall x, x' \in D : |x - x'| < \delta_\epsilon \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \epsilon.$$

- **LIPSCHITZ-Stetigkeit:** Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ heißt Lipschitz-stetig auf D mit Lipschitz-Konstante L , wenn:

$$\exists L > 0 : \forall x, y \in D : |f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x - y|.$$

Gilt weiter $L < 1$, so nennt man f eine *Kontraktion*.

Geometrisch bedeutet Lipschitz-stetig, dass die Abstandsverzerrung durch die Abbildung f , die durch $\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}$ charakterisiert wird, durch ein festes K auf ganz D beschränkt ist.

Lemma: Lipschitz-stetige Funktionen auf D sind auch stetig auf D .

- **Beispiel: eine gleichmäßig stetige Funktion, die nicht Lipschitz-stetig ist:**

Man betrachte die Funktion:

$$f(x) := \sqrt{x}, \quad \text{mit: } x \in [0, 1].$$

Diese Funktion ist auf $(0, 1]$ stetig und damit auch auf $[0, 1]$ mit der Fortsetzung $f(0) = 0$ gleichmäßig stetig. Aber sie ist nicht Lipschitz-stetig, mit folgenden Argumenten:

$$\begin{aligned} \left| \sqrt{0} - \sqrt{x} \right| &\stackrel{!}{\leq} L \cdot |0 - x| \\ \left| \sqrt{x} \right| &\stackrel{!}{\leq} L \cdot |x| \\ \Rightarrow L &\geq \left| \frac{\sqrt{x}}{x} \right| = \left| \frac{1}{\sqrt{x}} \right| \rightarrow \infty \quad (x \rightarrow 0) \end{aligned}$$

4.3 Konvergenz von Funktionenfolgen

- **Punktweise Konvergenz:** Seien $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ eine Folge von Funktionen auf einem gemeinsamen Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}$. Man nennt die Folge (f_n) *punktweise konvergent* gegen eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, wenn für jedes $x \in D$ gilt:

$$f_n(x) \rightarrow f(x) \quad (n \rightarrow \infty)$$

- **Gleichmäßige Konvergenz:** Eine Folge von Funktionen $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ heißt *gleichmäßig konvergent* gegen eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, wenn:

$$\forall \epsilon > 0 : \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f(x)| < \epsilon \quad \forall x \in D \quad \forall n > N_\epsilon$$

- **Satz über gleichmäßig konvergente Funktionenfolgen:** Konvergiert eine Funktionenfolge $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ gleichmäßig gegen eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, so ist auch die Grenzfunktion f stetig.

4.4 Der Funktionenraum $\mathcal{C}[a, b]$

Nach einem oben erwähnten Lemma bilden die stetigen Funktionen $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem kompakten Intervall $D = [a, b]$ einen Vektorraum. Dieser wird mit

$$\mathcal{C}[a, b] := \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$$

bezeichnet und hat folgende Eigenschaften:

- **Maximumsnorm:** Auf $\mathcal{C}[a, b]$ wird durch

$$\|f\|_\infty := \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$$

eine Norm definiert, die sog. *Maximumsnorm*. Das Maximum existiert auf Grund der Abgeschlossenheit von $[a, b]$ und der Stetigkeit von f .

- **Gleichmäßig beschränkt:** Man nennt eine Funktionenfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{C}[a, b]$ *gleichmäßig beschränkt*, wenn:

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left(\max_{x \in [a, b]} |f_n(x)| \right) < \infty.$$

- **Gleichmäßige Konvergenz:** Für eine Funktionenfolge $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ auf einem kompakten Intervall $D = [a, b]$ ist die *gleichmäßige Konvergenz* gegen eine Grenzfunktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ gleichbedeutend mit:

$$\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

- **CAUCHY-Folge:** Eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{C}[a, b]$ heißt *CAUCHY-Folge*, wenn:

$$\forall \epsilon > 0 \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} : \|f_n - f_m\|_\infty < \epsilon \quad \forall n, m \geq N_\epsilon$$

Jede konvergente Funktionenfolge aus $\mathcal{C}[a, b]$ ist auch CAUCHY-Folge.

- **Vollständigkeit:** Der Raum $\mathcal{C}[a, b]$ ist *vollständig* bezüglich der gleichmäßigen Konvergenz, d.h. Jede Cauchy-Folge von Funktionen aus $\mathcal{C}[a, b]$ besitzt einen Limes in $\mathcal{C}[a, b]$.

Damit bildet das Paar $(\mathcal{C}[a, b], \|\cdot\|_\infty)$, des $\mathcal{C}[a, b]$ zusammen mit der Maximumsnorm einen *Banach-Raum*.

- **Satz von ARZELÀ-ASCOLI:** Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{C}[a, b]$ eine Folge von Funktionen in $\mathcal{C}[a, b]$, welche gleichmäßig beschränkt und gleichgradig stetig sind:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta_\epsilon > 0 : \forall n \in \mathbb{N} : \begin{array}{l} \sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\|_\infty < \infty \\ \max_{x, x' \in I; |x-x'| \leq \delta_\epsilon} |f_n(x) - f_n(x')| < \epsilon \end{array}$$

Dann existiert eine Teilfolge (f_{n_k}) , welche gegen ein $f \in \mathcal{C}[a, b]$ konvergiert:

$$\|f_{n_k} - f\|_\infty \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty)$$

Gleichmäßig beschränkt bedeutet, dass man eine Beschränkungskonstante für alle Folgenglieder findet. Bei der gleichgradigen Stetigkeit hat man die selbe Abschätzung auf dem gesamten Intervall I für alle Elemente der Folge. Praktisch kann man die L -Stetigkeit mit einer Konstante L , die für die gesamte Folge gilt nachweisen.

Dieser Satz entspricht in etwa dem Satz von Bolzano-Weierstraß, da er die Existenz einer konvergenten Teilfolge auf dem Raum $\mathcal{C}[a, b]$ und damit von Häufungspunkten sichert. Der Satz von Bolzano-Weierstraß leistet dies für den Zahlenraum \mathbb{R} . Wichtig ist, dass für den unendlich-dimensionalen Funktionenraum zusätzliche Eigenschaften nötig sind, um die Existenz von Häufungspunkten zu zeigen. Hier wird zusätzlich zur Beschränktheit noch die gleichgradige Stetigkeit gefordert.

5.1 Grundbegriffe

- **Differenzierbarkeit:** Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *differenzierbar* im Punkt $x_0 \in D$ mit der Ableitung $f'(x_0)$, wenn für jede Nullfolge $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_0 + h_n \in D$ die Folge der zugehörigen Differenzenquotienten $(D_{h_n} f(x_0))$ konvergiert:

$$D_h f(x_0) := \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Ist eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ in einem Punkt $x_0 \in D$ differenzierbar, so haben die Folgen von Differenzenquotienten alle den selben Limes, d.h.:

$$f'(x_0) := \lim_{x_0 + h \in D, h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *differenzierbar* auf D , wenn sie in jedem Punkt $x_0 \in D$ differenzierbar (bzw. im Falle eines Randpunktes einseitig differenzierbar) ist.

Sie heißt *stetig differenzierbar*, wenn die Ableitung f' auf D stetig ist.

- Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann in einem Punkt $x_0 \in D$ *differenzierbar* mit Ableitung $f'(x_0)$, wenn:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta_\epsilon > 0 : \quad x_0 + h \in D, |h| < \delta_\epsilon \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) \right| < \epsilon$$

- Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann in einem Punkt $x_0 \in D$ *differenzierbar* mit Ableitung $f'(x_0)$, wenn:

$$\exists c \in \mathbb{R} : \quad f(x) = f(x_0) + c \cdot (x - x_0) + \omega(x), \quad x \in D,$$

mit einer Funktion $\omega : D \rightarrow \mathbb{R}$, für die gilt:

$$\lim_{x \in D, x \rightarrow x_0} \frac{\omega(x)}{x - x_0} = 0.$$

In diesem Falle ist $c = f'(x_0)$.

Dieser Satz besagt, dass die differenzierbare Funktion f im Punkt x_0 durch eine Gerade $g(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ approximiert wird. Der Graph von g ist eine Tangente an den Graphen im Punkt x_0 .

- Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, die in einem Punkt $x_0 \in D$ differenzierbar ist, ist dort notwendig auch stetig.
- **Ableitungsregeln:** Für Ableitungen gelten folgende Regeln:

1. **Linearkombinationen:** $(\alpha f + \beta g)'(x) = \alpha f'(x) + \beta g'(x)$

2. **Produktregel:** $\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

3. **Quotientenregel:** $\frac{d}{dx} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

4. **invertierbare Funktionen:** Für eine invertierbare Funktion $f : D \rightarrow B \subset \mathbb{R}$ mit abgeschlossenem Definitionsbereich ist auch die Umkehrfunktion $f^{-1} : B \rightarrow D \subset \mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt:

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}, \quad y = f(x)$$

Für den Beweis werden die Folgen $y_n = f(x_n)$, $y_0 = f(x_0)$ mit $y_n \rightarrow y_0$ ($n \rightarrow \infty$) betrachtet, für die wegen der Stetigkeit von f^{-1} auch $x \rightarrow x_0$ gilt. Wäre nun D nicht abgeschlossen, so könnte man $x_0 \in D$ nicht garantieren.

5. **Kettenregel:** Seien $g : D_g \rightarrow \mathbb{R}$ und $f : D_f \rightarrow D_g \subset \mathbb{R}$ stetig diff'bare Funktionen. Die Funktion f sei im Punkt $x_0 \in D_f$ differenzierbar und g sei in $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar. Dann ist die zusammengesetzte Funktion $g(f(x)) = (f \circ g)(x)$ in x_0 differenzierbar und es gilt:

$$\frac{d}{dx} g(f(x_0)) = g'(f(x_0))f'(x_0)$$

5.2 Mittelwertsätze und Extremalbedingungen

- **Satz vom Extremum:** Besitzt eine auf einem Intervall $I = (a, b)$ differenzierbare Funktion f ein lokales Extremum (Maximum oder Minimum) $x_0 \in I$, d.h. für ein festes $\delta > 0$ gilt:

$$f(x_0) \geq f(x) \quad \text{oder} \quad f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in U_\delta(x_0),$$

so ist notwendig $f'(x_0) = 0$.

Auf einem Abgeschlossenen Intervall besitzt jede stetige Funktion ein Maximum und ein Minimum. Da diese auch auf den Randpunkten liegen können, muss dort nicht unbedingt $f'(x_0) = 0$ gelten.

- **Satz von ROLLE:** Wenn eine im Intervall $[a, b]$ stetige Funktion in (a, b) differenzierbar ist und $f(a) = f(b)$ gilt, so gibt es ein $\xi \in (a, b)$, in dem $f'(\xi) = 0$ ist. Insbesondere liegt zwischen zwei Nullstellen einer Funktion stets auch eine Nullstelle ihrer Ableitung.

- **1. Mittelwertsatz:** Ist eine Funktion f im Intervall $[a, b]$ stetig und in (a, b) diff'bar, so gibt es ein $\xi \in (a, b)$, so dass:

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Der Satz besagt also, dass unter den obigen Bedingungen die Ableitung einer Funktion auf einem Intervall, irgendwo deren Mittelwert annimmt.

Folgerungen aus dem Mittelwertsatz:

1. *Monotoniebedingung:* Sei $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann gilt mit $x \in (a, b)$:
 - $f'(x) \geq 0 \Rightarrow f$ ist monoton steigend.
 - $f'(x) \leq 0 \Rightarrow f$ ist monoton fallend.
2. *Minimum/Maximum:* Sei $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar mit $f'(x_0) = 0, x_0 \in (a, b)$. Dann gilt:
 - $f''(x) > 0 \Rightarrow f$ hat in x_0 ein striktes lokales Minimum.
 - $f''(x) < 0 \Rightarrow f$ hat in x_0 ein striktes lokales Maximum.
3. *Konvexitätsbedingung:* Gilt für eine auf einem offenen, beschränkten oder unbeschränkten Intervall I definierte und zweimal diff'bare Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, dass $f''(x) \geq 0, x \in I$, so ist f konvex, d.h.: Für beliebige $x, y \in I$ und $\lambda \in (0, 1)$ gilt:

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

4. *LIPSCHITZ-Stetigkeit:* Ist die Ableitung einer in $[a, b]$ stetigen und in (a, b) diff'baren Funktion f beschränkt, $|f'(x)| \leq K, x \in (a, b)$, so ist f dort Lipschitz-stetig:

$$|f(x) - f(x')| \leq K \cdot |x - x'|; \quad x, x' \in [a, b].$$

- **2. Mittelwertsatz:** Sind die Funktionen f und g im Intervall $[a, b]$ stetig und in (a, b) diff'bar und ist $g'(x) \neq 0$ für $x \in (a, b)$, so gibt es ein $\xi \in (a, b)$, so dass gilt:

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Für zwei Funktionen gibt es also einen Punkt ξ , an dem das Verhältnis der Ableitungen, gleich dem Verhältnis der Steigungen der zwei Geraden durch Anfangs- und Endpunkt der Funktionen im Intervall $[a, b]$ ist.

5.3 TAYLOR-Entwicklungen

- **TAYLOR-Polynom:** Für eine auf dem offenen Intervall (a, b) definierte und n -mal stetig diff'bare Funktion f hat für ein $x_0 \in (a, b)$ das n -te Taylor-Polynom von f in x_0 die Form:

$$t_n(x_0, x) := \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$

- Sei f eine auf einem offenen Intervall (a, b) definierte und $(n+1)$ -mal stetig diff'bare Funktion und $t_n(x_0, \cdot)$ ihr n -tes Taylor-Polynom um ein $x_0 \in (a, b)$. Dann gibt es zu jedem $x \in (a, b)$ ein ξ zwischen x und x_0 , so dass gilt:

$$f(x) = t_n(x_0, x) + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}_{\text{Restglied}}$$

- **Glattheit, bzw. C^∞ -Funktionen:** Eine Funktion f auf einem Intervall (a, b) heißt *glatt* oder *C^∞ -Funktion*, wenn sie beliebig oft diff'bar ist. Ihre *Taylor-Reihe* um ein $x_0 \in (a, b)$ ist dann definiert durch:

$$t_\infty(x_0, x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k.$$

- **(Reell) analytische Funktionen:** Konvergiert die Taylor-Reihe einer C^∞ -Funktion f für alle $x \in (a, b)$ und gilt dort auch $f(x) = t_\infty(x_0, x)$, so heißt f *reell analytisch*.
- **TAYLOR-Entwicklung:** Sei f auf einem Intervall (a, b) eine C^∞ -Funktion mit (gleichgradig) gleichmäßig beschränkten Ableitungen:

$$\sup_{x \in (a,b)} |f^{(n)}(x)| \leq M < \infty, \quad n \in \mathbb{N}$$

Dann ist f auf (a, b) analytisch, d.h.: Für alle $x, x_0 \in (a, b)$ konvergiert die Taylor-Reihe von f und es gilt:

$$f(x) = t_\infty(x_0, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k.$$

Eine C^∞ -Funktion muß nicht analytisch sein. Ein Gegenbeispiel ist die auf \mathbb{R} definierte Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-x^{-2}), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Diese Funktion ist wegen $\lim_{x \rightarrow 0} \exp(-x^{-2}) = 0$ in $x_0 = 0$ und damit auf ganz \mathbb{R} stetig. Alle Ableitung $f^{(n)}(x)$ existieren und lassen sich in $x_0 = 0$ durch $f(0) := 0$ stetig fortsetzen. Damit ist $f \in C^\infty$. Die Taylorreihe von f ist in $x_0 = 0$ die Nullfunktion und konvergiert dort also auch gegen f . Allerdings stellt die Taylorreihe f in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ nirgends dar. Damit ist sie nicht analytisch.

- **Restglieddarstellung:** Das Restglied $R_{n+1}(x_0, x)$ bei der Taylor-Entwicklung ist in der Differential- bzw. Integraldarstellung:

$$R_{n+1}(x_0, x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1} = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt$$

- **Beispiele:**

Funktion	Taylor-Reihe	Konvergenzbereich
Sinus	$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm \dots$	∞
Cosinus	$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \pm \dots$	∞
Logarithmus	$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \dots$	$-1 < x \leq 1$
	$\ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} x^k = -\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} \pm \dots\right)$	$-1 < x \leq 1$

5.4 NEWTON-Verfahren

In diesem Abschnitt soll das sog. Newton-Verfahren untersucht werden. Es dient zur numerischen Approximation von Nullstellen differenzierbarer Funktionen $f(x)$. Gesucht ist also ein x_* mit:

$$f(x_*) = 0$$

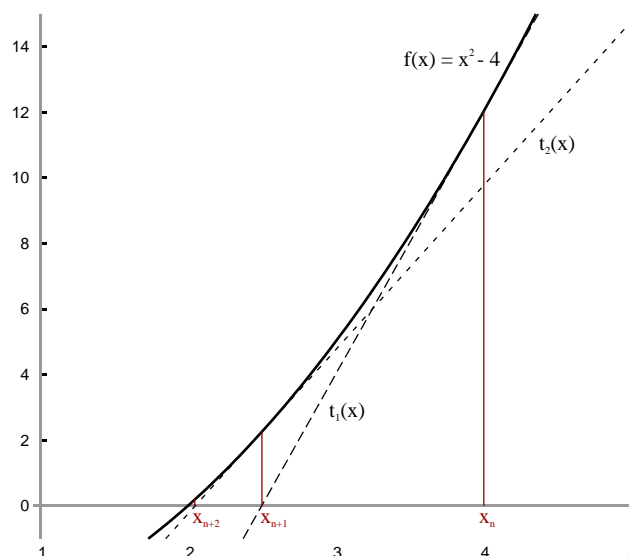
Man berechnet jeweils im aktuellen Punkt x_n die Tangente $t_n(x)$ an den Graphen und nimmt deren Schnittpunkt x_{n+1} mit der x -Achse als neuen Schätzwert für die zu suchende Nullstelle x_* . Die Tangente hat folgende Form:

$$t_n(x) = F'(x_n) \cdot (x - x_n) + f(x_n) \stackrel{!}{=} 0.$$

Daraus erhält man folgende Bedingung für den neuen Punkt x_{n+1} mit $t(x_{n+1}) = 0$:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Die folgende Abbildung veranschaulicht das Verfahren an am Beispiel der Suche nach $\sqrt{4} = 2$ mit dem Startpunkt $x_n = 4$.



Folgender Satz beschreibt die Konvergenz des Newton-Verfahrens:

NEWTON-Verfahren: Die zweimal stetig diff'bare Funktion $f : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ habe eine Nullstelle $x_* \in (a, b)$ und es sei:

$$m := \min_{a \leq x \leq b} |f'(x)| > 0, \quad M := \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|.$$

Sei $\rho > 0$ so gewählt, dass:

$$q := \frac{M}{2m} \cdot \rho < 1 \quad \text{und} \quad K_\rho(x_*) \subset [a, b].$$

Dann sind für jeden Startpunkt $x_0 \in K_\rho(x_*)$ die Newton-Iterationen $x_{n+1} = x_n + \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ definiert und konvergieren gegen die Nullstelle x_* . Dabei gelten sie apriori-Abschätzung:

$$|x_n - x_*| \leq \frac{2m}{M} q^{(2^n)}, \quad n \in \mathbb{N}$$

und die a posteriori-Abschätzung:

$$|x_n - x_*| \leq \frac{1}{m} |f(x_n)|, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Bemerkungen: Das Problem ist, eine Umgebung der Nullstelle zu finden, innerhalb derer das Verfahren konvergiert. Ist eine solche Umgebung einmal gefunden, konvergiert das Newton-Verfahren aufgrund der ersten Fehlerabschätzung quadratisch gegen die Nullstelle.

5.5 Differentiation und Grenzprozesse

- **Regeln von L'HOSPITAL:** Es seien f, g zwei auf dem (beschränkten) Intervall $I = (a, b)$ diff'bare Funktionen. Es gelte dort $g'(x) \neq 0$ und es existiere der Limes

$$\lim_{x \downarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} =: c \in \mathbb{R}$$

Dann gelten folgende Regeln:

1. Im Fall $\lim_{x \downarrow a} f(x) = \lim_{x \downarrow a} g(x) = 0$ ist $g(x) \neq 0$ in I und es gilt:

$$\lim_{x \downarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = c = \lim_{x \downarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

2. Im Fall $\lim_{x \downarrow a} f(x) = \lim_{x \downarrow a} g(x) = \pm\infty$ ist $g(x) \neq 0$ für $a < x \leq b$ und es gilt:

$$\lim_{x \downarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = c = \lim_{x \downarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Analoge Aussagen gelten für $x \uparrow b$ und $x \rightarrow \pm\infty$.

Auch für bestimmte Produktausdrücke, der Art:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x)$$

kann mit den L'Hospital'schen Regeln und der Setzung

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{(g(x))^{-1}}$$

eine Lösung finden.

- **Stabilität der Differenzierbarkeit:** Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge stetig diff'barer Funktionen auf einem (beschränkten) Intervall I (offen oder abgeschlossen), welche punktweise gegen eine Funktion f konvergiert. Ist die Folge der Ableitungen (f'_n) gleichmäßig konvergent gegen ein f^* , so ist auch f diff'bar und es gilt $f' = f^*$, d.h.:

$$\frac{d}{dx} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n$$

- **Differentiation unendlicher Summen:** Seien f_k stetig diff'bare Funktionen auf dem beschränkten Intervall I (offen oder abgeschlossen) mit Ableitungen f'_k . Wenn die Partialsummen $\sum_{k=1}^n f_k$ punktweise konvergieren und die $\sum_{k=1}^n f'_k$ auf I gleichmäßig konvergieren, so darf in den zugehörigen Reihen gliedweise differenziert werden und es gilt:

$$\frac{d}{dx} \sum_{k=1}^{\infty} f_k = \sum_{k=1}^{\infty} f'_k.$$

- **Potenzreihe:** Eine Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x - x_0)^k$ mit Konvergenzradius $\rho > 0$ stellt ein in ihrem Konvergenzintervall $I = (x_0 - \rho, x_0 + \rho)$ diff'bare Funktion f dar; und zwar ist:

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k (x - x_0)^{k-1}.$$

Diese durch gliedweise Differentiation entstandene Potenzreihe hat ebenfalls den Konvergenzradius ρ .

- **Raum $\mathcal{C}^m[a, b]$:** Der normierte Raum $\mathcal{C}^m[a, b]$ der auf dem Intervall $[a, b]$ m -mal stetig diff'baren Funktionen, versehen mit der Norm $\|\cdot\|_{m, \infty}$, ist vollständig.

6.1 Das RIEMANN-Integral

6.1.1 Herleitung und Definition

- **Zerlegung, Feinheit und Verfeinerung:** Eine *Unterteilung oder Zerlegung* $Z = \{x_0, \dots, x_n\}$ eines (beschränkten) Intervalles $I = [a, b]$ zerlegt dieses in Teilintervalle $I_k := [x_{k-1}, x_k]$. Es gilt:

$$a =: x_0 < x_1 < \dots < x_n := b$$

Eine solche Zerlegung Z hat die *Feinheit*:

$$h := \max_{k=1, \dots, n} |x_k - x_{k-1}|.$$

Die Menge aller Zerlegungen eines Intervalles $[a, b]$ wird mit $\mathcal{Z}(a, b)$ bezeichnet.

Eine *Verfeinerung* $Z' = \{x'_0, \dots, x'_n\}$ einer Zerlegung $Z \in \mathcal{Z}(a, b)$ enthält alle Zerlegungspunkte von Z und möglicherweise noch weitere. Für die Feinheit gilt mit der Feinheit h von Z : $h' := \max_{k=1, \dots, n} |x'_k - x'_{k-1}| \leq h$

- **Ober- und Untersumme:** Für eine beschränkte Funktion $f : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und eine Zerlegung $Z \in \mathcal{Z}(a, b)$ ist die *Obersumme* $\bar{S}_Z(f)$ und *Untersumme* $\underline{S}_Z(f)$ von f definiert als:

$$\bar{S}_Z(f) := \sum_{k=1}^n \sup_{x \in I_k} f(x) \cdot (x_k - x_{k-1}), \quad \underline{S}_Z(f) := \sum_{k=1}^n \inf_{x \in I_k} f(x) \cdot (x_k - x_{k-1})$$

Daraus ergibt sich die Definition von *Ober- und Unterintegral*:

$$\int_a^b f(x) dx := \inf_{Z \in \mathcal{Z}(a, b)} \bar{S}_Z(f), \quad := \sup_{Z \in \mathcal{Z}(a, b)} \underline{S}_Z(f)$$

Diese Definition entspricht der Integration über eine Treppenfunktion zur Zerlegung Z , die f approximiert. Die Definition von Ober- und Unterintegral macht Sinn, da der Wert der Obersumme mit steigender Feinheit abnimmt und der Wert der Untersumme entsprechend zunimmt, da die Funktion f immer besser approximiert wird.

- **Größenabschätzung für Ober- und Untersumme:** Für eine beschränkte Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ existieren das Ober-, sowie das Unterintegral und für jede Folge von Zerlegungen $Z_n \in \mathcal{Z}(a, b)$, $n \in \mathbb{N}$ mit Feinheit $h_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{S}_{Z_n} = \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{S}_{Z_n}$$

- **Eigenschaften von Ober- und Unterintegralen:** Für Ober- und Unterintegrale gilt:

$$\begin{aligned} \int_a^b (f(x) + g(x)) dx &\geq \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \\ \int_a^b (f(x) + g(x)) dx &\leq \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \\ \alpha \geq 0 &\Rightarrow \int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx \\ \alpha \geq 0 &\Rightarrow \int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx \\ \alpha \leq 0 &\Rightarrow \int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx \end{aligned}$$

- **RIEMANN-Integral:** Sind Ober- und Untersumme für eine beschränkte Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ gleich, so heißt der gemeinsame Wert das (*bestimmte*) *Riemann-Integral* von f auf $I := [a, b]$ und die Funktion wird *Riemann-integrierbar* genannt. Es gilt dann natürlich:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

6.1.2 Integrierbarkeitskriterien

- **RIEMANN'sches Integrierbarkeitskriterium:** Eine beschränkte Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann über I *Riemann-integrierbar*, wenn es zu beliebigem $\epsilon > 0$ eine Zerlegung $Z \in \mathcal{Z}(a, b)$ gibt, so dass für die zugehörigen Ober- und Untersummen gilt:

$$|\bar{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f)| < \epsilon$$

- **RIEMANN-Summe und Integrierbarkeit:** Für eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und eine Zerlegung $Z \in \mathcal{Z}(a, b)$ wird die *Riemann'sche Summe* von f mit beliebigen $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ gebildet durch:

$$RS_Z(f) := \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \cdot (x_k - x_{k-1})$$

Integrierbarkeitskriterium: Eine beschränkte Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann *Riemann-integrierbar*, wenn für jede Folge von Zerlegungen $Z_n \in \mathcal{Z}(a, b)$ mit Feinheiten $h_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \mathbb{N}$) alle zugehörigen Riemann'schen Summen konvergieren und denselben Limes haben:

$$RS_{Z_n}(f) \rightarrow \int_a^b f(x) dx \quad (n \rightarrow \infty).$$

Die Riemann-Summen zu einer Zerlegung stellen gewissermaßen alle Zwischenschritte zwischen Ober- und Untersumme dar, Damit gibt es auch eine ideale Folge von ξ_k , mit der $RS_Z(f)$ mit dem Integral übereinstimmt.

• **weitere Integrierbarkeitskriterien:**

1. Jede auf einem abgeschlossenen Intervall stetige Funktion ist *Riemann-integrierbar*.
2. Jede auf einem abgeschlossenen Intervall (beschränkte) monotone Funktion ist *Riemann-integrierbar*.

Nicht jede beschränkte Funktion ist R-integrierbar. Ein pathologisches Beispiel ist:

$$f(x) := \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$$

Hier gilt für jede Zerlegung (jedes Zerlegungsintervall enthält sicher $a, b \in I_k$ mit $a \in \mathbb{Q}$ und $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$):

$$\int_a^b f(x) dx \leq \underline{S}_Z(f) = 0 < 1 = \bar{S}_Z(f) \leq \int_a^b f(x) dx.$$

- **Zusammengesetzte Integrale:** Eine (beschränkte) R-integrierbare Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist auch über jedem abgeschlossenen Teilintervall $I' \subset [a, b]$ R-integrierbar. Insbesondere lässt sich jedes Integral mithilfe eines beliebigen $c \in (a, b)$ aufspalten zu:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Ist umgekehrt eine (beschränkte) Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ für ein $c \in (a, b)$ R-integrierbar in den Intervallen $[a, c]$ und $[c, b]$, so ist es auch auf $[a, b]$ R-integrierbar.

- **Stückweise RIEMANN-Integrierbarkeit:** Eine beschränkte Funktion $f : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, welche bzgl. einer Zerlegung $Z = \{x_0, \dots, x_n\} \in \mathcal{Z}(a, b)$ von I stückweise stetig und stückweise monoton (also monoton und stetig auf allen Teilintervallen I_k) ist über I R-integrierbar und es gilt:

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx.$$

- **Einige RIEMANN-Integrierbare Funktionen:** Es seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ (beschränkte) R-integrierbare Funktionen. Dann gilt:

1. Die Funktionen $f_+ := \max\{f, 0\}$ und $f_- := \min\{f, 0\}$ sind R-integrierbar.
2. Der Absolutbetrag ist R-integrierbar mit: $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$
3. Für jedes $p \geq 1$ ist $|f|^p$ R-integrierbar.
4. Das Produkt fg ist R-integrierbar.

Die Beweise funktionieren je über eine Abschätzung der Ober- und Untersummen der neuen Funktionen durch die alten. Das Produkt fg folgt aus der Beziehung $fg = \frac{1}{4} \left((f+g)^2 - (f-g)^2 \right)$ und 3. Bei 2 beachte man die Ähnlichkeit zur Dreiecksungleichung $|a+b| \leq |a| + |b|$.

- **Satz von LEBESGUE:** Die Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann Riemann-Integrierbar, wenn sie auf $[a, b]$ beschränkt und fast überall stetig ist.
- **Integration komplexer Funktionen:** Auch Funktionen $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ sind Riemann-integrierbar, durch die Setzung:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \operatorname{Re} f(x) dx + i \int_a^b \operatorname{Im} f(x) dx$$

6.1.3 Eigenschaften des RIEMANN-Integrals

- **Linearität des RIEMANN-Integrals:** Sind $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ R-integrierbare Funktionen, so ist auch jede Linearkombination $\alpha f + \beta g$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ R-integrierbar und es gilt:

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$$

- **Monotonie des RIEMANN-Integrals:** Seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ (beschränkte) R-integrierbare Funktionen mit $g(x) \geq f(x)$, $x \in [a, b]$. Dann gilt auch:

$$\int_a^b g(x) dx \geq \int_a^b f(x) dx.$$

- **Abschätzung durch Rechtecke:** Für eine (beschränkte) R-integrierbare Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $m \leq f(x) \leq M$, $\forall x \in [a, b]$ gilt:

$$m \cdot (b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M \cdot (b - a).$$

- **Definitheit des RIEMANN-Integrals:** Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(x) \geq 0$, $x \in [a, b]$. Dann gilt:

$$\int_a^b f(x) dx = 0 \quad \Rightarrow \quad f \equiv 0$$

6.1.4 Das unbestimmte RIEMANN-Integral

- **Unbestimmtes Integral:** Eine Funktion $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *unbestimmtes Integral* (oder *Stammfunktion*) einer Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, wenn sie diff'bar ist und wenn gilt:

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in [a, b]$$

Man schreibt dann:

$$F(x) = \int f(x) dx$$

Die Stammfunktion ist immer nur bis auf eine additive Konstante C bestimmt, also eigentlich:

$$\int f(x) dx = F(x) + C.$$

- **Fundamentalsatz:**

1. Für eine stetige Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist das bestimmte Riemann-Integral

$$F(x) := \int_a^x f(y) dy, \quad x \in [a, b]$$

aufgefaßt als Funktion der oberen Grenze x eine Stammfunktion von f . Jede weitere Stammfunktion von f unterscheidet sich von F nur durch eine additive Konstante.

2. Ist umgekehrt die Funktion $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Stammfunktion einer stetigen Funktion f , so gilt:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b := F(b) - F(a).$$

Dieser Satz besagt, dass *Integration und Differentiation zueinander inverse Prozesse sind*:

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(y) dy = f(x), \quad \int_a^x f'(y) dy = f(x) - \underbrace{f(a)}_{= \text{const}}$$

6.1.5 Berechnung von Integralen

- **Partielle Integration:** Seien $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ zwei stetig diff'bare Funktionen. Dann gilt:

$$\int_a^b f(x) g'(x) dx = (fg)(x) \Big|_a^b - \int_a^b f'(x) g(x) dx$$

Die Formel folgt direkt aus der Integration der Produktregel für die Differentiation: $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

- **Substitutionsregel:** Seien $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige und $\varphi : [a, b] \rightarrow I$ eine stetig diff'bare Funktion. Dann gilt die sog. *Substitutionsregel*:

$$\int_a^b f(\varphi(y)) \varphi'(y) dy = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx$$

Es gibt die instruktivere Schreibweise:

$$\int_a^b f(\varphi(y)) d\varphi(y) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx; \quad d\varphi(y) = \varphi'(y) dy$$

Oft wendet man obige Regel so an, dass man zu einer gegebenen, zu integrierenden Funktion $\int_a^b f(x) dx$ eine passende Funktion $\varphi(y)$ sucht, mit der sich das Integral nach der Substitutionsregel leicht lösen lässt. Man setzt dann $x := \varphi(y)$ und $\frac{dx}{dy} = \frac{d\varphi(y)}{dy} = \varphi'(y) \Rightarrow dx = \varphi'(y) \cdot dy$. Damit erhält man dann:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(\varphi(y)) d\varphi(y) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(\varphi(y)) \varphi'(y) dy$$

Beispiel I: $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ löst man mit $x := \varphi(y) = \sin(y)$ und damit $dx = \cos(y) dy$ auf, zu:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-\sin(y)^2}} \cos(y) dy = \int_{-1}^1 \frac{\cos y}{\cos y} dy = 2$$

Beispiel II: Andersherum sucht man z.B. die Lösung für $\int_0^{\pi/4} (\sin(x))^3 \cdot \cos(x) \cdot dx$. Hier definiert man $\varphi(x) = \sin(x)$. Damit ergibt sich $\frac{d\varphi(x)}{dx} = \cos(x) \Rightarrow d\varphi(x) = \cos(x) dx$. Mit diesen Vorgaben sieht man:

$$\int_0^{\pi/4} \underbrace{(\sin(x))^3}_{=\varphi(x)} \cdot \underbrace{\cos(x) \cdot dx}_{=d\varphi(x)} = \int_{\varphi(0)=0}^{\varphi(\pi/4)=\frac{1}{2}\sqrt{2}} \varphi(x)^3 \cdot d\varphi(x) = \left[\frac{1}{4} \varphi^4 \right]_0^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{16}$$

6.1.6 Kurvenlängen

- **Parametrisierte Kurven:** Es seien φ, ψ zwei stetige Funktionen eines Parameters $t \in [a, b]$. Sind die Punkte der Ebene $(\varphi(t), \psi(t))$, $t \in [a, b]$ alle verschieden, so nennt man die Punktmenge

$$\Gamma := \{(\varphi(t), \psi(t)) \mid t \in [a, b]\}$$

ein *ebenes Kurvenstück* mit Parameterdarstellung $\{\varphi, \psi\}$.

- **Polygonzugverfahren:** Zur Längenberechnung wird ein Kurvenzug durch gerade Linien zwischen je zwei Stützstellen $P_k = (\varphi(t_k), \psi(t_k))$ und $P_{k+1} = (\varphi(t_{k+1}), \psi(t_{k+1}))$ gezogen. Die Länge eines Teilstückes ist über den euklidischen Abstand definiert. Damit ergibt sich die Länge eines Polygonzuges $|p_Z(\Gamma)|$ zu einer gegebenen Zerlegung $Z = \{t_0, \dots, t_n\}$ zu:

$$|p_Z(\Gamma)| := \sum_{k=1}^n \sqrt{(\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1}))^2 + (\psi(t_k) - \psi(t_{k-1}))^2}$$

- **Rektifizierbarkeit und Länge einer Kurve** Haben die Längen aller Polygonzüge $p_Z(\Gamma)$ zu einem Kurvenstück Γ eine (endliche) obere Grenze, so heißt Γ *rektifizierbar* mit der *Länge*:

$$|\Gamma| := \sum_{Z \in \mathcal{Z}(a,b)} |p_Z(\Gamma)|$$

- **Kurvenlänge:** Ist die Parameterdarstellung des Kurvenstückes Γ stetig diff'bar, so ist es rektifizierbar und seine Länge ist gegeben durch:

$$|\Gamma| = \int_a^b \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2} dt$$

Die obige Formel folgt aus der bereits angegebenen Summendarstellung unter Erweiterung mit

$\frac{t_k - t_{k-1}}{t_k - t_{k-1}} = 1$ und dann nach dem Mittelwertsatz und Grenzübergang:

$$\begin{aligned} |p_Z(\Gamma)| &:= \sum_{k=1}^n \sqrt{(\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1}))^2 + (\psi(t_k) - \psi(t_{k-1}))^2} = \\ &= \sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1}) \cdot \sqrt{\left(\frac{\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}}\right)^2 + \left(\frac{\psi(t_k) - \psi(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}}\right)^2} = \\ &= \sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1}) \cdot \sqrt{\varphi'(\tau_k)^2 + \psi'(\tau_k)^2} \end{aligned}$$

6.2 Mittelwertsätze

- **1. Mittelwertsatz:** Es seien $f : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ R-integrierbar und g habe in I keinen Vorzeichenwechsel. Dann gibt es eine Zwischenstelle $\xi \in [a, b]$, so dass gilt:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx.$$

Korollar: Sei $f : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt als Spezialfall des 1. Mittelwertsatzes mit $g = 1$, mit einem $\xi \in I$:

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi) \cdot (b - a)$$

Dies bedeutet anschaulich, dass es ein $\xi \in [a, b]$ gibt, sodass $f(\xi)$ gerade den Mittelwert der Funktion über dem Intervall $[a, b]$ darstellt:

$$f(\xi) = \frac{1}{b - a} \cdot \int_a^b f(x)dx$$

Den ersten 1. Mittelwertsatz kann man auch als Verallgemeinerung dieses Korollars auffassen. Man bezeichnet dann die Funktion $g(x)$ als Gewichtsfunktion.

Korollar: Seien $f : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $m \leq f(x) \leq M$, $x \in I$ und $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ R-integrierbar mit $g \geq 0$. Dann gilt:

$$m \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M \int_a^b g(x)dx$$

Dies liefert eine Abschätzung für das Integral $\int_a^b f(x) \cdot g(x)dx$ aufgrund des Integrals über $g(x)$ und kann zu dessen Berechnung herangezogen werden.

- **2. Mittelwertsatz:** Es seien $f : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ monoton und $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ R-integrierbar. Dann gibt es eine Zwischenstelle $\xi \in [a, b]$, so dass gilt:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a) \int_a^\xi g(x)dx + f(b) \int_\xi^b g(x)dx.$$

Dies liefert ebenfalls eine Abschätzung für das Integral $\int_a^b f(x) \cdot g(x)dx$ aufgrund des Integrals über $g(x)$ und kann zu dessen Berechnung herangezogen werden.

6.3 Uneigentliche Integrale

- **Uneigentliches RIEMANN-Integral:** Sei $f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine auf dem halboffenen Intervall $(a, b]$ aber nicht auf dem Abschluss $[a, b]$ integrierbare Funktion. Existiert für jede Folge von Punkten $a_n \in (a, b]$ der Limes

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{a_n \downarrow a} \int_{a_n}^b f(x) dx,$$

so ist dieser unabhängig von der Wahl der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und heißt *uneigentliches Integral* von f über $[a, b]$.

- **Uneigentliches Integral von Beträgen:** Sei $f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ auf $(a, b]$ aber nicht auf $[a, b]$ integrierbar. Existiert dann das uneigentliche Integral von $|f|$ über $[a, b]$, so existiert auch das uneigentliche Integral von f über $[a, b]$ und es gilt:

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

Damit hat das uneigentliche Integral von Beträgen das gleiche Verhalten, wie das eigentliche Riemann-Integral.

- **Uneigentliches RIEMANN-Integral auf unendlichen Intervallen:** Sei $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ eine auf dem halboffenen unendlichen Intervall $[a, \infty)$ lokal integrierbare Funktion. Existiert für jede Folge von Punkten $b_n \in [a, \infty)$ der Limes

$$\int_a^\infty f(x) dx := \lim_{b_n \rightarrow \infty} \int_a^{b_n} f(x) dx,$$

so ist dieser unabhängig von der Wahl der Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und heißt *uneigentliches Integral* von f über $[a, \infty)$.

Auch hier folgt aus der Existenz des uneigentlichen Integrals von $|f|$ über $[a, \infty)$ die Existenz des uneigentlichen Integrals von f und die Ungleichung:

$$\left| \int_a^\infty f(x) dx \right| \leq \int_a^\infty |f(x)| dx.$$

- **Uneigentliches RIEMANN-Integral von Produkten:** Sei $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ in $[a, \infty)$ integrierbar mit

$$\sup_{x \geq a} \left| \int_a^x f(t) dt \right| = M < \infty.$$

Ferner sei $g : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$ diff'bar und monoton gegen Null fallend. Dann existiert ein uneigentliches Integral

$$\int_a^\infty f(x)g(x) dx = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_a^x f(x)g(x) dx.$$

- **Beziehung zwischen unendlichen Reihen und uneigentlichen Integralen:** Es sei $f : [n_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige, positive, monoton fallende Funktion. Dann gilt:

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} f(k) < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \int_{n_0}^{\infty} f(x) dx < \infty.$$

6.4 Integration und Grenzprozesse

- **Gleichmäßige Konvergenz:** Die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ stetiger Funktionen $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ konvergiere auf einem Intervall $I = [a, b]$ gleichmäßig gegen eine Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Dann ist die Grenzfunktion ebenfalls stetig und es gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx.$$

- **Integration und unendliche Reihen:** Für eine Folge stetiger Funktionen $f_k : I \rightarrow \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ konvergiere die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ auf einem Intervall $I = [a, b]$ gleichmäßig. Dann stellt die Reihe eine integrierbare Funktion dar und es gilt:

$$\int_a^b \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k(x) dx.$$

D.h. Man darf in der Reihe gliedweise integrieren.

- **Potenzreihe:** Eine Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x - x_0)^k$ habe den Konvergenzradius $\rho > 0$; sie stellt also auf dem Intervall $I = (x_0 - \rho, x_0 + \rho)$ eine stetige Funktion dar. Deren Stammfunktion erhält man dann durch gliedweise Integration und diese hat den selben Konvergenzradius:

$$\int \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x - x_0)^k dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1} (x - x_0)^{k+1} + C$$

- **Monotone Konvergenz:** Die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von auf einem beschränkten Intervall $I = [a, b]$ (uneigentlich) integrierbaren Funktionen $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ konvergiere punktweise gegen eine Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Ist die Konvergenz $f_n \rightarrow f$ monoton wachsend und ist f ebenfalls (uneigentlich) integrierbar, so gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx$$

- **Beschränkte Konvergenz:** Die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von auf einem Intervall $I = [a, b)$ oder $I = [a, \infty)$ (uneigentlich) integrierbaren Funktionen $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ konvergiere punktweise gegen eine Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Ist die Grenzfunktion f ebenfalls (uneigentlich) integrierbar und sind die Funktionen f_n gleichmäßig beschränkt durch eine auf I (uneigentlich) integrierbare Funktion $g : I \rightarrow \mathbb{R}$, d.h. $|f_n(x)| \leq g(x)$, $x \in I$, so gilt ebenfalls:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx$$

7.1 Der Funktionenraum $\mathcal{R}[a, b]$

- **Stückweise Stetigkeit:** Eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ heißt *stückweise stetig*, wenn sie in $[a, b]$ bis auf endlich viele Ausnahmestellen stetig und beschränkt ist und wenn in jeder dieser Unstetigkeitsstellen $\xi \in [a, b]$ die links- und rechtsseitigen Grenzwerte $f(\xi_{\pm}) := \lim_{h \downarrow 0} f(\xi \pm h)$ existieren. In den Ausnahmestellen $\xi \in (a, b)$ sei gesetzt:

$$f(\xi) := \frac{f(\xi_{-}) + f(\xi_{+})}{2}.$$

Die obige Setzung hat keinen Einfluss auf den Wert des Riemann-Integrals. Anschaulich wird in ξ die Funktion auf den Mittelwert zwischen den zwei Grenzwerten gesetzt.

- **Der Vektorraum $\mathcal{R}[a, b]$:** Die Menge der in obigem Sinne auf $[a, b]$ stückweise stetigen (Riemann-integrierbaren) Funktionen bilden offenbar einen Vektorraum, der mit $\mathcal{R}[a, b]$ bezeichnet wird.

Auf diesem Vektorraum definiert die Sesquilinearform (komplexe Konjugation: $\overline{a + ib} = a - ib$):

$$(f, g) := \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx$$

das sog. L^2 -Skalarprodukt mit folgenden Eigenschaften:

1. *Linearitätseigenschaften:*

$$(\alpha f_1 + \beta f_2, g) = \alpha(f_1, g) + \beta(f_2, g) \quad (f, \alpha g_1 + \beta g_2) = \overline{\alpha}(f, g_1) + \overline{\beta}(f, g_2)$$

2. *Symmetrieeigenschaften:* $(f, g) = \overline{(g, f)}$

3. *Semidefinitheit:* $(f, f) \geq 0$

4. Es gilt die SCHARZ'sche Ungleichung:

$$|(f, g)|^2 \leq (f, f) \cdot (g, g).$$

Durch folgende Setzung definiert man die sog. L^2 -Norm auf $\mathcal{R}[a, b]$:

$$\|f\| := \sqrt{(f, f)}$$

Den Begriff der *Orthogonalität* zweier Funktionen $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$ definiert man durch die Eigenschaft:

$$(f, g) = 0$$

- **L^2 -Konvergenz bzw. Konvergenz im quadratischen Mittel:** Mit Hilfe der L^2 -Norm $\|\cdot\|$ lässt sich die *Konvergenz im quadratischen Mittel* von Funktionen $f_n \in \mathcal{R}[a, b]$ gegen eine Funktion $f \in \mathcal{R}[a, b]$ erklären:

$$f_n \rightarrow_{L^2} f \Leftrightarrow \|f_n - f\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Dies bedeutet, dass das quadratische Mittel der Abweichung zwischen f_n und f gegen Null geht:

$$\int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 dx \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Mit folgender Abschätzung zeigt man, dass die gleichmäßige Konvergenz von f_n gegen f auch die L^2 -Konvergenz impliziert. Umgekehrt ist das nicht unbedingt richtig:

$$\|f_n - f\| = \sqrt{\int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 dx} \leq \max_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| \cdot \sqrt{b - a}$$

Gegenbeispiel: Die Funktionenfolge $f_n(x) = x^n$ konvergiert auf $[0, 1]$ punktweise nicht gegen die Nullfunktion, weil $f_n(1) = 1, \forall n \in \mathbb{N}$ gilt. Sie konvergiert aber im quadratischen Mittel gegen die Nullfunktion:

$$\|f_n - 0\|^2 = \int_0^1 (x^{2n} - 0) dx = \frac{1}{2n+1} x^{2n+1} \Big|_0^1 \leq \frac{1}{2n+1} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

- **Orthogonalsystem trigonometrischer Funktionen auf $\mathcal{R}[0, 2\pi]$:** Die trigonometrischen Funktionen

$$c_0(x) := 1, \quad c_k(x) := \cos(k \cdot x), \quad s_l(x) = \sin(l \cdot x), \quad (k, l \in \mathbb{N})$$

bilden bzgl. des L^2 -Skalarproduktes ein Orthogonalsystem in $\mathcal{R}[0, 2\pi]$. Es gilt:

$$(c_k, s_l) = 0, \quad (c_k, c_l) = \pi \cdot \delta_{kl}, \quad (s_k, s_l) = \pi \cdot \delta_{kl}, \quad k, l \in \mathbb{N}$$

7.2 FOURIER-Entwicklung

- **FOURIER-Entwicklung in sin / cos-Funktionen:** Für eine beliebige Funktion $f \in \mathcal{R}[0, 2\pi]$ definiert man die zugehörige *Fourier-Summe* durch:

$$F_n^f(x) := \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^n \{a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\}.$$

Dabei sind die Koeffizienten bestimmt durch:

$$a_0 := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx; \quad a_k := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) dx; \quad b_k := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) dx;$$

Zur Berechnung der Koeffizienten wird jeweils das Skalarprodukt $a_k = \frac{1}{\pi}(f, c_k)$, bzw. $b_k = \frac{1}{\pi}(f, s_k)$ berechnet. Das entspricht "geometrisch" der Projektion von f auf den Basisvektor c_k, s_k des Funktionenraumes. Im wesentlichen wird also die Darstellung der Funktion $f \in \mathcal{R}[a, b]$, bezüglich des unendlichen Erzeugendensystems $c_k, s_k, k \in \mathbb{N}$ von $\mathcal{R}[a, b]$ berechnet.

- **FOURIER-Entwicklung in e^{ikx} :** Für eine beliebige Funktion $f \in \mathcal{R}[0, 2\pi]$ definiert man die zugehörige *Fourier-Summe* durch:

$$F_n^f(x) := \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx} \quad \text{mit} \quad c_k := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx; \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Im Falle der Konvergenz heißt der Limes der Fourier-Summen, die *Fourier-Reihe*:

$$F_\infty^f(x) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}.$$

Die folgenden Betrachtungen beziehen sich auf die komplexe Definition der Fourier-Reihen. Sie lässt sich über die Definition von \sin und \cos auf die erste Definition zurückführen und ist somit völlig Gleichwertig:

$$\cos(x) = \frac{1}{2} (e^{ix} + e^{-ix}); \quad \sin(x) = \frac{1}{2i} (e^{ix} - e^{-ix})$$

- Es sei $f \in \mathcal{R}[0, 2\pi]$ eine 2π -periodische Funktion mit den Fourier-Koeffizienten $c_k, k \in \mathbb{Z}$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\|f - F_n^f\|^2 = \|f\|^2 - 2\pi \sum_{k=-n}^n |c_k|^2$$

- **BESSEL'sche Ungleichung:** Es sei $f \in \mathcal{R}[0, 2\pi]$ eine 2π -periodische Funktion mit den Fourier-Koeffizienten $c_k, k \in \mathbb{Z}$. Dann konvergieren die Quadratsummen der Fourier-Koeffizienten und es gilt:

$$2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} 2\pi \sum_{k=-n}^n |c_k|^2 \leq \|f\|^2 = \int_a^b f(x)^2 dx.$$

Zusammen mit der obigen Ungleichung ergibt sich aus der Bessel'schen Ungleichung, dass:

$$\|f - F_n^f\|^2 \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty), \quad \text{wenn} \quad 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \rightarrow \|f\|^2 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Dies bedeutet die L^2 -Konvergenz der Fourierreihe F_n^f gegen die zugehörige Funktion $f \in \mathcal{R}[0, 2\pi]$.

- **RIEMANN'sches Lemma:** Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine diff'bare Funktion. Für $s \in \mathbb{R}$ gilt:

$$F(s) := \int_a^b f(x) \sin(sx) dx \rightarrow 0 \quad (|s| \rightarrow \infty).$$

- **Konvergenz einiger wichtiger Reihen:**

- Auf jedem Intervall $[\delta, 2\pi - \delta]$ mit $\delta > 0$ konvergiert die folgende Reihe gleichmäßig:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k} = \frac{\pi - x}{2}.$$

- Die folgende Reihe konvergiert gleichmäßig für $x \in \mathbb{R}$. Insbesondere gilt im Fall $x = 0$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2} = \left(\frac{x - \pi}{2}\right)^2 - \frac{\pi^2}{12}; \quad x = 0: \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

- **Konvergenz der FOURIER-Reihe gegen Treppenfunktionen:** Sei $f \in \mathcal{R}[0, 2\pi]$ eine 2π -periodische Treppenfunktion. Dann konvergiert ihre Fourier-Reihe F_{∞}^f im quadratischen Mittel gegen f .

- **Vollständigkeitsrelation:** Sei $f \in \mathcal{R}[0, 2\pi]$ eine 2π -periodische Funktion. Dann konvergiert ihre Fourier-Reihe im quadratischen Mittel gegen f und mit ihren Fourier-Koeffizienten c_k gilt die sog. *Vollständigkeitsrelation*:

$$2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \|f\|^2$$

Zum Beweis: Man konstruiert eine Einschließung der Funktion f durch zwei Treppenfunktionen, von denen eine die Funktion nach oben und eine nach unten abgrenzt.

Achtung: Die L^2 -Konvergenz impliziert nicht die punktweise oder gleichmäßige Konvergenz der Reihe gegen die zugehörige Funktion f . Damit ist die Frage der Darstellung der Funktion durch ihre Fourier-Reihe (= punktweise Konvergenz) nicht ganz geklärt.

- **Ein Konvergenzkriterium für FOURIER-Reihen:** Die Fourierreihe einer stetigen Funktion $f \in \mathcal{R}[0, 2\pi]$ konvergiert absolut und gleichmäßig gegen f , wenn für die Fourierkoeffizienten c_k gilt:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k| < \infty$$

Dies folgt aus der Abschätzung:

$$\left| \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx} \right| \leq \sum_{k=-n}^n |c_k|$$

- Sei $f \in \mathcal{R}[0, 2\pi]$ eine 2π -periodische Funktion, die in $[0, 2\pi]$ bis auf endlich viele Ausnahmestellen x_1, \dots, x_m diff'bar ist, mit stückweise definierter Ableitung $\tilde{f}' \in \mathcal{R}[0, 2\pi]$. Dann konvergiert die Fourier-Reihe von f auf ganz $[0, 2\pi]$ punktweise gegen f und gleichmäßig auf jedem abgeschlossenen Teilintervall, auf dem f stetig ist. Insbesondere gilt in jeder dieser Ausnahmestellen $\xi := x_k$:

$$F_n^f(x) \rightarrow \frac{f(\xi_-) + f(\xi_+)}{2} \quad (n \rightarrow \infty).$$

Dabei sind $f(\xi_{\pm})$ die links- bzw. rechtsseitigen Limites gegen die Unstetigkeitsstelle ξ :

$$f(\xi_{\pm}) := \lim_{h \downarrow 0} f(\xi \pm h).$$

Teil II

Analysis 2: Analysis des \mathbb{K}^n

8.1 Der euklidische Raum \mathbb{K}^n

Viele bereits definierte Begriffe übertragen sich (fast direkt) auf den \mathbb{K}^n , wenn man statt des Betrages eine auf \mathbb{K}^n definierte Norm verwendet. Das Standardbeispiel für eine solche Norm ist die euklidische Norm $\|\cdot\|_2$.

- **Konvergente Folgen:** Eine Folge von Vektoren $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{K}^n$ heißt *konvergent* gegen ein $x \in \mathbb{K}^n$, wenn gilt:

$$\|x^{(k)} - x\|_2 \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty)$$

Die geometrische Bedeutung der Konvergenz ist, dass jede ϵ -Umgebung von x fast alle Folgelemente $x^{(k)}$ enthält.

- **CAUCHY-Folge:** Eine Folge heißt *Cauchy-Folge*, wenn gilt:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} : \quad \forall k, l > N_\epsilon : \quad \|x^{(k)} - x^{(l)}\|_2 < \epsilon$$

- **Beschränkte Folgen:** Eine Folge heißt *beschränkt*, wenn alle ihre Elemente in einer Kugelumgebung $K_{\mathbb{R}}(0)$ um den Nullpunkt liegen.
- **Häufungspunkt:** Ein Punkt $x \in \mathbb{K}^n$ heißt *Häufungspunkt* einer Menge $M \subset \mathbb{K}^n$, wenn jede Umgebung von x mindestens einen Punkt aus $M \setminus \{x\}$ enthält.
Die Menge der Häufungspunkte von M wird mit $\mathcal{H}(M)$ bezeichnet. Ein Punkt $x \in M \setminus \mathcal{H}(M)$ wird *isoliert* genannt.

Ein isolierter Punkt x ist also kein Häufungspunkt einer Folge aus M . Das bedeutet es gibt Umgebungen $U_\epsilon(x)$, die nicht in M liegen.

- Für eine Menge $M \subset \mathbb{K}^n$ gilt:

$$M \cup \mathcal{H}(M) = \overline{M}.$$

Eine Menge $M \subset \mathbb{K}^n$ ist genau dann abgeschlossen, wenn sie alle ihre Häufungspunkte enthält.

- **Satz von BOLZANO-WEIERSTRASS:**

1. Jede Cauchy-Folge in \mathbb{K}^n konvergiert, d.h.: Der euklidische Raum \mathbb{K}^n ist vollständig und somit ein Banach-Raum.
2. Jede beschränkte Folge in \mathbb{K}^n besitzt eine konvergente Teilfolge (hat also mindestens einen Häufungspunkt).

Analoge Aussagen gelten auch für Teilmengen des \mathbb{K}^n . So hat etwa jede beschränkte Teilmenge des \mathbb{K}^n einen Häufungspunkt. Diese zwei Aussagen gelten nur für endliche Vektorräume; für unendliche VRs (z.B. $\mathcal{C}[a, b]$, $\mathcal{R}[a, b]$) sind sie im allgemeinen falsch.

- **Produkt Räume:** Auf dem Produktraum $V = \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n$ definiert man mit $\| \{x, y\} \| := \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2}$ eine natürliche Norm. Dieser Raum kann mit dem \mathbb{K}^{2n} identifiziert werden. Diese Konstruktion lässt sich auf (endlich dimensionale) Produkt Räume erweitern.

8.2 Lineare Abbildungen auf dem \mathbb{K}^n

- **Reguläre Matrizen:** Für Matrize $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ sind folgende Aussagen äquivalent:
 1. A ist *regulär*.
 2. $Ax = b$ ist für jedes $b \in \mathbb{K}^n$ eindeutig lösbar.
 3. $Ax = 0$ ist nur durch $x = 0$ lösbar.
 4. $\text{Rang}(A) = n$.
 5. $\det(A) \neq 0$.
 6. Alle Eigenwerte von A sind ungleich Null.
- **Gleiche Matrizen:** Zwei Matrizen $A, A' \in \mathbb{K}^{n \times n}$ sind *gleich*, wenn $Ax = A'x$, $\forall x \in \mathbb{K}^n$.
- **Ähnliche Matrizen:** Zwei Matrizen $A, A' \in \mathbb{K}^{n \times n}$ sind *ähnlich*, wenn mit einer regulären Matrix $T \in \mathbb{K}^{n \times n}$ gilt: $A' = T^{-1}AT$

Ähnliche Matrizen sind also solche, die bezüglich zweier unterschiedlicher Basen die selbe lineare Abbildung darstellen. Ihre Eigenwerte sind gleich.

9.1 Stetigkeit

Im folgenden werden Funktionen $f : D \subset \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$ betrachtet, deren Definitionsbereich offen ist. Auch sind die folgenden Aussagen für beliebige Normen gültig, da alle Normen auf \mathbb{K}^n nach dem Satz über die Normäquivalenz gleich sind.

- **Bilder und Urbilder von stetigen Abbildungen:** Für stetige Funktionen $f : D \subset \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$ mit D offen gilt:
 1. Das Urbild $f^{-1}(O)$ einer offenen Menge $O \subset f(D)$ ist offen.
 2. Das Urbild $f^{-1}(A)$ einer abgeschlossenen Menge $A \subset f(D)$ ist abgeschlossen.
 3. Das Bild $f(K)$ einer kompakten Menge $K \subset D$ ist kompakt.
 4. Das Bild $f(M)$ einer zusammenhängenden Menge $M \subset D$ ist zusammenhängend.
- **Stetigkeit:** Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{K}^n$ heißt *stetig* in einem Punkt $a \in D$, wenn für jede Folge $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ in D gilt:

$$x^{(k)} \rightarrow a \quad (k \rightarrow \infty) \quad \Rightarrow \quad f(x^{(k)}) \rightarrow f(a) \quad (k \rightarrow \infty)$$

Sie heißt *stetig in D* , wenn sie in jedem Punkt aus D stetig ist.

- **Satz über stetige Funktionen:** Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{K}^n$ ist genau dann in einem Punkt $a \in D$ *stetig*, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta_\epsilon > 0$ gibt, so dass für $x \in D$ gilt:

$$\|x - a\| < \delta_\epsilon \quad \Rightarrow \quad \|f(x) - f(a)\| < \epsilon.$$

Für zwei stetige Funktionen $f, g : D \rightarrow \mathbb{K}^n$ sind auch die Summe $f + g$, das Produkt $f \cdot g$ und im Falle $g(x) \neq 0, x \in D$ auch der Quotient f/g stetig.

- **Satz von der Beschränktheit:** Eine stetige Funktion $f : D \subset \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$ ist auf jeder kompakten Menge $K \subset D$ *beschränkt*, d.h. Es gibt eine Konstante M_K mit:

$$\sup_{x \in K} |f(x)| \leq M_K.$$

- **Satz vom Extremum:** Eine stetige Funktion $f : D \subset \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$ nimmt auf jeder kompakten Menge $K \subset D$ ihr *Maximum* und *Minimum* an, d.h. Es gibt Punkte x^{\max} und x^{\min} , so dass:

$$f(x^{\max}) = \sup_{x \in K} f(x) \quad f(x^{\min}) = \inf_{x \in K} f(x)$$

- **Satz von der gleichmäßigen Stetigkeit:** Eine stetige Funktion $f : D \subset \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$ ist auf einer kompakten Menge $K \subset D$ *gleichmäßig stetig*, d.h. Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta_\epsilon > 0$, so dass für alle $x, y \in K$ gilt:

$$\|x - y\| < \delta_\epsilon \quad \Rightarrow \quad \|f(x) - f(y)\| < \epsilon$$

- **punktweise und gleichmäßige Konvergenz:** Eine Folge von Funktionen $f_k : D \subset \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$, $k \in \mathbb{N}$ konvergiert *punktweise* gegen eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{K}$, wenn für alle $x \in D$ gilt:

$$f_k(x) \rightarrow f(x) \quad (k \rightarrow \infty)$$

Sie konvergiert gleichmäßig, wenn gilt:

$$\sup_{x \in D} |f_k(x) - f(x)| \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty)$$

- **Satz von der gleichmäßigen Konvergenz:** Konvergiert eine Folge stetiger Funktionen $f_k : D \subset \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$, $k \in \mathbb{N}$ gleichmäßig gegen eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{K}$, so ist auch diese stetig.
- **Zwischenwertsatz:** Sei $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und D zusammenhängend. Dann nimmt f für je zwei Punkte $a, b \in D$ jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an. Insbesondere hat f im Falle $f(a)f(b) < 0$ eine Nullstelle in D .

Die Bedingung $f(a)f(b) < 0$ bedeutet, dass einer der Beiden Funktionswerte größer und einer kleiner als Null ist.

9.2 Vektor- und Matrixwertige Funktionen

9.2.1 Vektorwertige Funktionen

- **LIPSCHITZ-Stetigkeit:** Eine Abbildung $f : D \subset \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ heißt *Lipschitz-stetig*, wenn mit einer sog. *Lipschitz-Konstante* $L > 0$ gilt:

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L \cdot \|x - y\|, \quad \forall x, y \in D.$$

Im Falle $L < 1$ heißt f *Kontraktion* bzgl. der gewählten Norm.

- **Starke Monotonie:** Eine Abbildung $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt *stark monoton*, wenn es eine Konstante $m > 0$ gibt, so dass für $x, y \in D$ gilt:

$$(f(x) - f(y), x - y)_2 \geq m \cdot \|x - y\|_2^2.$$

- **BANACH'scher Fixpunktsatz:** Sei $f : D \subset \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ eine Abbildung, für welche die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. f bildet eine abgeschlossene Teilmenge $M \subset D$ in sich ab.

2. Auf M ist f eine Kontraktion mit Lipschitzkonstante $q \in (0, 1)$.

Dann besitzt f in M genau einen Fixpunkt x^* und für jeden Startpunkt $x^{(0)} \in M$ konvergiert die Folge der durch

$$x^{(k)} = f(x^{(k-1)}), \quad k \in \mathbb{N}$$

definierten Iteration $x^{(k)} \in M$ gegen diesen Fixpunkt $x^* \in M$ mit der Fehlerabschätzung:

$$\|x^{(k)} - x^*\| \leq \frac{q^k}{1 - q} \cdot \|x^{(1)} - x^{(0)}\|.$$

Man interessiert sich für Lösungen von Gleichungssystemen der folgenden Form:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \dots, x_n) &= b_1 \\ f_2(x_1, \dots, x_n) &= b_2 \\ &\vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) &= b_n. \end{aligned}$$

Dies lässt sich natürlich mit $f : D \subset \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ und $x, b \in \mathbb{K}^n$ auch schreiben als:

$$f(x) = b.$$

Im Allgemeinen lässt sich ein solches Gleichungssystem nicht mehr in expliziter Form $x = f^{-1}(b)$ lösen. Man kann dann aber versuchen eine Folge von Punkten $x^{(n)}$ zu konstruieren, die gegen die Lösung x^* konvergiert. Man macht dazu den folgenden Ansatz (mit geeignetem $\sigma \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$):

$$x^{(k+1)} = g(x^{(k)}) := x^{(k)} - \sigma \cdot (f(x^{(k)}) - b).$$

Ist $x^{(k)}$ eine ideale Lösung, gilt also $f(x^{(k)}) = b$, so folgt daraus: $x^{(k+1)} = x^{(k)}$. Anschaulich korrigiert also obige Abbildung den aktuellen Wert für die Lösung mit einem Maß für die Abweichung, die der Wert vom Idealwert hat. σ sorgt dafür, dass es sich bei $g(x^{(k)})$ wirklich um eine Kontraktion handelt. Angewendet auf lineare Gleichungssysteme $Ax = b$, $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$, $x, b \in \mathbb{K}^n$ ergibt sich (siehe auch folgendes Lemma):

$$x^{(k+1)} := x^{(k)} - \sigma \cdot (Ax^{(k)} - b)$$

Das folgende Lemma gibt einen Wert für σ : $\sigma := \frac{1}{\|A\|_\infty}$.

• **Korollar/Anwendung zum Fixpunktsatz: RICHARDSON-Iteration:**

Seien $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ hermitesch und positiv definit und $b \in \mathbb{K}^n$ gegeben. Dann konvergiert die Fixpunktiteration

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} - \frac{1}{\|A\|_\infty} \cdot (Ax^{(k-1)} - b), \quad k \in \mathbb{N}$$

für jeden Startwert $x^{(0)}$ gegen die Lösung des Gleichungssystems

$$Ax = b.$$

- **Korollar/Anwendung zum Fixpunktsatz: nichtlineare Gleichungen:**

Seien $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Lipschitz-stetige, monotone Abbildung mit Lipschitz-Konstante L und $b \in \mathbb{K}^n$ gegeben. Dann hat die Gleichung

$$f(x) = b$$

eine eindeutige Lösung x^* . Für jeden Startwert $x^{(0)}$ konvergiert die sukzessive Iteration

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} - \theta \cdot (f(x^{(k-1)}) - b), \quad k \in \mathbb{N}$$

für jedes $\theta \in (0, \frac{2m}{L^2})$ gegen x^* .

9.2.2 Matrixfunktionen

- Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ eine hermite'sche Matrix mit (ihrer Vielfachheit entsprechend oft gezählten) Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Ist $p \in P_r$ ein Polynom, dessen Nullstellen mit keinem der Eigenwerte von A übereinstimmen, so ist die Matrix $p(A) := \sum_{k=0}^r a_k A^k$ regulär.
- **Exponential- und trigonometrische Funktionen von Matrizen:** Da auch für Matrizen Exponentialsummen konvergieren, kann man definieren:

$$e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k; \quad \cos(A) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k)!} A^{2k}; \quad \sin(A) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!} A^{2k+1}$$

Achtung: Für die skalare Exponentialfunktion gilt die Beziehung $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$. Diese ist für die matrixwertige Exponentialfunktion nicht mehr unbedingt gegeben. Im Beweis dieser Beziehung wird die Kommutativität der Multiplikation ($xy = yx$) ausgenutzt, die bei Matrizen im Allgemeinen nicht gilt. Also:

$$a^A \cdot a^B \neq e^{A+B}.$$

Die Funktionsgleichung gilt aber im Falle $A = B$: $a^B e^B = e^{2B} = e^{B+B}$.

10.1 Partielle Ableitung

10.1.1 Begriffsdefinition

- **Partielle Ableitung:**

1. Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge. Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt in einem Punkt $x \in D$ *partiell differenzierbar* bzgl. der i -ten Koordinatenrichtung, falls der folgende Limes existiert.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h e^{(i)}) - f(x)}{h} =: \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) =: \partial_i f(x)$$

Man nennt dann $\partial_i f(x)$ die *partielle Ableitung* bzgl. x_i von f in x .

2. Existieren in allen Punkten $x \in D$ alle partiellen Ableitungen so heißt f *partiell differenzierbar*. Sind alle partielle Ableitungen stetige Funktionen auf D , so heißt f *stetig partiell differenzierbar*.
3. Eine vektorwertige Funktion $f = (f_1, \dots, f_m) : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ heißt *(stetig) partiell differenzierbar*, wenn alle ihre Komponenten f_i (stetig) partiell differenzierbar sind.

Beispiele:

1. **Abstandsfunktion:**

$$r(x) := \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} \quad \Rightarrow \quad \partial_i r(\dots, x_i, \dots) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x_i}{2\sqrt{\dots + x_i^2 + \dots}} = \frac{x_i}{r(x)}$$

- **Mehrfache partielle Differenzierbarkeit:** Sind für eine partiell diff'bare Funktion $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ die partiellen Ableitungen $\partial_i f : D \rightarrow \mathbb{R}$ wieder partiell diff'bar, so heißt f *zweimal partiell differenzierbar*. Dieser Prozess lässt sich natürlich fortsetzen, solange die entstehenden Ableitungen partiell diff'bar sind. Man schreibt:

$$\partial_{i_1} \dots \partial_{i_k} f(x) = \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \dots \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} f(x) = \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(x).$$

- Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen. Die Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ habe in einer Kugelumgebung $K_r(x) \subset D$ eines Punktes $x \in D$ beschränkte partielle Ableitungen (oder f sei überhaupt in $K_r(x)$ stetig partiell diff'bar):

$$\sup_{x \in K_r(x)} |\partial_i f(x)| \leq M, \quad i = 1, \dots, n.$$

Dann ist f stetig im Punkt x .

- **Vertauschbarkeit der Differentiationsreihenfolge:** Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen. Die Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ sei in einer Umgebung $K_r(x) \subset D$ eines Punktes $x \in D$ zweimal stetig partiell diff'bar. Dann gilt:

$$\partial_i \partial_j f(x) = \partial_j \partial_i f(x), \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Allgemein ist für eine k -mal stetig diff'bare Funktion die Reihenfolge der partiellen Ableitungen vertauschbar.

10.1.2 Begriffe der Vektoranalysis

- **Gradient (Vektor der ersten partiellen Ableitungen):** Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine partiell diff'bare Funktion. Der Vektor der ersten partiellen Ableitungen heißt *Gradient* von f im Punkt $x \in D$:

$$\text{grad } f(x) = \nabla f(x) := (\partial_1 f(x), \dots, \partial_n f(x)) \in \mathbb{R}^n.$$

Produktregel für den Gradienten: $\nabla(f \cdot g) = g \cdot (\nabla f) + f \cdot (\nabla g)$

- **JACOBI-Matrix/Funktionalmatrix und Funktionaldeterminante:** Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine partiell diff'bare Vektorfunktion. Die Matrix der ersten partiellen Ableitungen heißt *Funktionalmatrix* von f im Punkt $x \in D$:

$$J_f(x) := (\partial_j f_i(x))_{i,j=1}^{n,m} \in \mathbb{R}^{m \times n}.$$

Man schreibt auch $J_f(x) = \nabla f(x)$. Im Fall $m = n$ wird die Determinante $|J_f(x)|$ von $J_f(x)$ *Funktional-Determinante* genannt.

Matrixschreibweise:

$$J_f(x) := \begin{pmatrix} \nabla f_1(x) \\ \vdots \\ \nabla f_m(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(x) & \cdots & \partial_n f_1(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f_m(x) & \cdots & \partial_n f_m(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}.$$

- **Divergenz:** Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine partiell diff'bare Funktion. Die skalare Funktion

$$\text{div } f(x) = \nabla \cdot f(x) := \partial_1 f_1(x) + \dots + \partial_n f_n(x) \in \mathbb{R}$$

wird *Divergenz* genannt.

Produktregel für die Divergenz: $\nabla \cdot (fg) = (\nabla f) \cdot g + f \cdot (\nabla \cdot g)$

- **HESSE-Matrix (Matrix der zweiten partiellen Ableitungen):** Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal partiell diff'bare Funktion. Die Matrix der zweiten partiellen Ableitungen heißt *Hesse-Matrix* von f im Punkt $x \in D$

$$H_f(x) := (\partial_i \partial_j f(x))_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Man schreibt $H_f(x) = \nabla^2 f(x)$.

Hier das ganze in Matrixschreibweise, nur um jeglichen Verwirrungen vorzubeugen:

$$H_f(x) := \begin{pmatrix} \partial_{11}f(x) & \cdots & \partial_{1n}f(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_{n1}f(x) & \cdots & \partial_{nn}f(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

10.1.3 Totale Differenzierbarkeit

- **totale Differenzierbarkeit:** Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge. Eine Abbildung $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ heißt in einem Punkt $x \in D$ *total differenzierbar* (oder einfach *differenzierbar*), wenn es eine lineare Abbildung $Df(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ (das sog. *Differential* von f) gibt, so dass in einer Umgebung von x gilt:

$$f(x+h) = f(x) + Df(x) \cdot h + \omega(h), \quad h \in \mathbb{R}^n, x+h \in D,$$

mit einer Funktion $\omega : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ der Art

$$\lim_{x+h \in D, \|h\| \rightarrow 0} \frac{\|\omega(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

Diese Beziehung schreib man auch abgekürzt in der Form $\omega(h) = o(\|h\|)$. Das Differential von f ist gerade die Funktionalmatrix von f :

$$Df(x) = J_f(x).$$

- **Differenzierbarkeit:** Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen. Für Funktionen $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ gilt:
 1. Ist f in $x \in D$ diff'bar, so ist es auch partiell diff'bar.
 2. Ist f stetig partiell diff'bar in einer Umgebung von $x \in D$, so ist es dort auch diff'bar.
- **Richtungsableitung:** Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ im Punkt $x \in D$ diff'bar. Dann existiert für jeden Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ mit $\|v\|_2 = 1$ die Ableitung in Richtung v (Sog. *Richtungsableitung*):

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x) = \partial_v f(x) = (\nabla f(x)) \cdot v := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t}.$$

Da $\nabla f(x)$ in die Richtung der größten Steigung von f zeigt, ist die Richtungsableitung parallel zu $\nabla f(x)$ maximal.

- **Kettenregel:** Seien $D_f \subset \mathbb{R}^n$ und $D_g \subset \mathbb{R}^m$ offene Mengen und $g : D_g \rightarrow \mathbb{R}^r$ und $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}^m$ Abbildungen. Ist g im Punkt $x \in D_g$ und die Abbildung f im Punkt $g(x)$ diff'bar, so ist die Komposition $h := f \circ g$ im Punkt x diff'bar und es gilt:

$$Dh(x) = Df(g(x)) \cdot Dg(x).$$

Dabei ist $Dh(x) \in \mathbb{R}^{r \times n}$, $Df(y) \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $Dg(x) \in \mathbb{R}^{r \times m}$ und der Punkt \cdot steht für die entsprechende Matrix-Multiplikation.

Komponentenweise bedeutet obige Formel ($y = g(x)$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, r$):

$$\frac{\partial h_j}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial f_j}{\partial (g_k(x))}(g_1(x), \dots, g_m(x)) \cdot \frac{\partial g_k}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n).$$

Im wesentlichen wird also über alle partiellen Ableitungen einer Komponente von $h(x)$ nach allen Komponenten von x summiert und jeweils die Kettenregel für partielle Ableitungen angewandt.

- **Beziehung zwischen den Differenzierbarkeiten:** Es gelten folgende Implikationen. Die Umkehrung ist im allgemeinen falsch:

$$\text{stetig partiell diff'bar} \Rightarrow (\text{total}) \text{ diff'bar} \Rightarrow \text{partiell diff'bar}$$

Beispiel: Es gibt Funktionen, deren partielle Ableitungen existieren, die aber nicht total diff'bar sind.

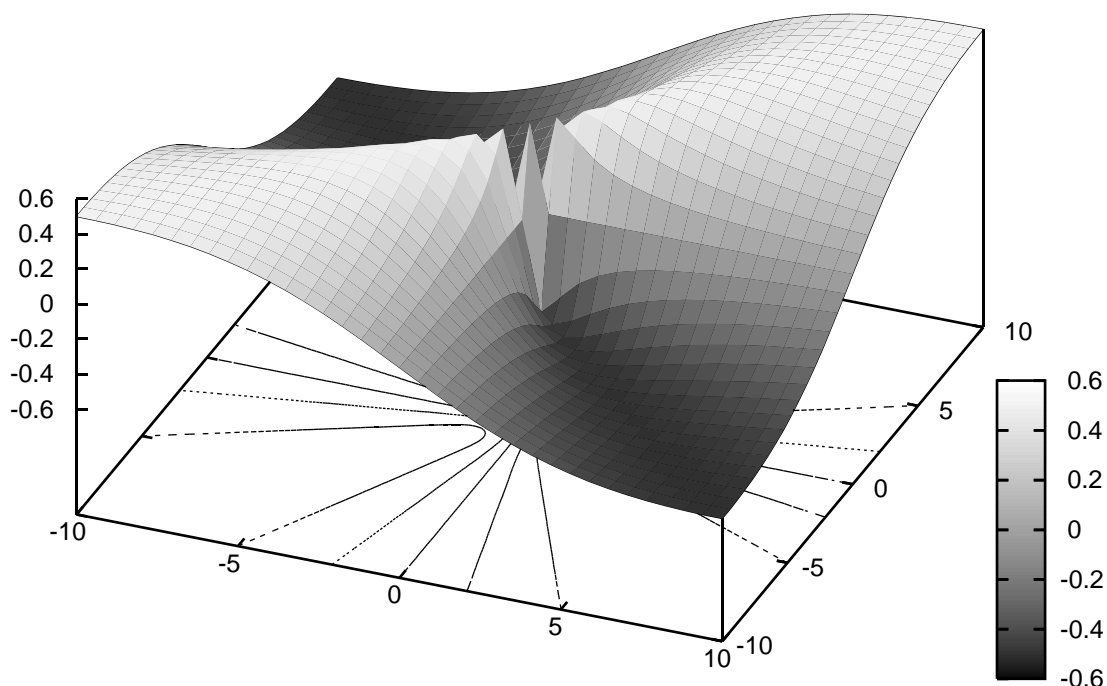
$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \forall (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Es gilt:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y^3 - x^2y}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^3 - xy^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

Aber die Funktion ist in $(0, 0)$ nicht stetig und also erst recht nicht diff'bar: Dies zeigt man etwa mit der Folge $(a_n) \subset \mathbb{R}^2$, mit $a_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \rightarrow (0, 0)$ ($n \rightarrow \infty$):

$$f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{1/n^2}{2/n^2} = \frac{1}{2} \neq 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$



10.1.4 Mittelwertsätze

- **Mittelwertsatz:** Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig diff'bar mit Gradient $\nabla f(x)$. Ferner sei $x \in D$ und $h \in \mathbb{R}^n$ so, dass $x + sh \in D$ für $0 \leq s \leq 1$. Dann gilt:

$$f(x+h) - f(x) = \underbrace{\left(\int_0^1 \nabla f(x+sh) \, ds \right)}_{\in \mathbb{R}^n} \cdot h \in \mathbb{R}.$$

Ist $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig diff'bar mit Jacobi-Matrix $J_f(x)$, so gilt:

$$f(x+h) - f(x) = \underbrace{\left(\int_0^1 J_f(x+sh) \, ds \right)}_{\in \mathbb{R}^{m \times n}} \cdot h \in \mathbb{R}^m.$$

Mit $M := \max_{0 \leq s \leq 1} \|J_f(x+sh)\|_2$ gilt die folgende Abschätzung:

$$\|f(x+h) - f(x)\|_2 \leq M \|h\|_2.$$

Dies bedeutet, dass die Funktion f in D lokal *Lipschitz-stetig* ist.

Anschaulich bedeutet der Mittelwertsatz, dass man entlang der Verbindungslinie h zwischen x und $x+h$ über die Ableitungen integriert (im Eindimensionalen entspricht das in etwa dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung).

Die Integration über Vektoren und Matrizen ist hier komponentenweise zu verstehen.

Für eine stetig diff'bare Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ folgt mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Integralrechnung die Beziehung:

$$f(x+h) - f(x) = \int_0^1 (\nabla f(x+sh)) \cdot h \, ds = (\nabla f(x+\tau h)) \cdot h$$

Mit einem $\tau \in (0,1)$ als Zwischenwert. Die mehrdimensionale Mittelwertaussage hat keine entsprechende differentielle Formulierung!

Das ganze kann man sich vorstellen, wie den eindimensionalen Mittelwertsatz entlang einer Verbindungsstrecke $h \equiv b - a$ zwischen zwei Punkten $a \equiv x$ und $b \equiv x+h$. Dabei ist dann $\xi = x + \tau h$ ein Punkt auf der Geraden zwischen b und a .

$$\frac{f(b) - f(a)}{\|b - a\|} = \nabla \left(\underbrace{f(x + \tau h)}_{=\xi} \right) \cdot \underbrace{\frac{b - a}{\|b - a\|}}_{=e_{b-a}}.$$

Dabei ist e_{b-a} der Einheitsvektor in Richtung $b - a$, mit $\|e_{b-a}\| = 1$. Der eindimensionale Mittelwertsatz besagt, dass es auf $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein ξ gibt, so dass gilt:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$

- **Verträglichkeit von Normenbildung und Integration:** Sei $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine stetige, vektorwertige Funktion. Dann gilt:

$$\left\| \int_a^b f(s) \, ds \right\|_2 \leq \int_a^b \|f(s)\|_2 \, ds.$$

10.2 TAYLOR-Entwicklung im \mathbb{R}^n

- **Multi-Index-Notation:** Für n -Tupel $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ wird gesetzt:

$$|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n; \quad \alpha! := \alpha_1! \cdot \dots \cdot \alpha_n!$$

Für $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ wird gesetzt:

$$x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n}$$

Für eine $|\alpha|$ -mal stetig diff'bare Funktion wird gesetzt:

$$D^\alpha f := \partial_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot \partial_n^{\alpha_n} f = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot \partial x_n^{\alpha_n}} f.$$

- **TAYLOR-Formel:** Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine $(r + 1)$ -mal stetig diff'bare Funktion. Dann gilt für jeden Vektor $h \in \mathbb{R}^n$ mit $x + sh \in D$, $s \in [0, 1]$ die *Taylor-Formel*:

$$f(x + h) = \sum_{|\alpha| \leq r} \frac{D^\alpha f(x)}{\alpha!} \cdot h^\alpha + R_{r+1}^f(x, h).$$

Das Restglied $R_{r+1}^f(x, h)$ hat in differentieller und integraler Form folgende Darstellung:

$$\begin{aligned} R_{r+1}^f(x, h) &= \sum_{|\alpha|=r+1} \frac{D^\alpha f(x+\theta h)}{\alpha!} \cdot h^\alpha =, & \theta \in (0, 1) \\ &= (r + 1) \cdot \int_0^1 \sum_{|\alpha|=r+1} \frac{D^\alpha f(x+t \cdot h)}{\alpha!} \cdot (1 - t)^r dt. \end{aligned}$$

- **Darstellung der ersten Glieder der Taylor-Entwicklung:** Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine $r + 1$ -mal stetig diff'bare Funktion. Dann gilt für alle $x \in D$ und

$$f(x + h) = \sum_{|\alpha| \leq r} \frac{\partial^\alpha f(x)}{\alpha!} h^\alpha + \omega_r(h),$$

mit Funktionen ω_r mit den Eigenschaften $\omega_r(0) = 0$ und

$$\lim_{h \rightarrow 0, h \neq 0} \frac{\omega_r(h)}{\|h\|_2^r}.$$

Speziell im Fall $r = 1$ gilt mit dem Gradienten ∇f von f :

$$f(x + h) = f(x) + (\nabla f(x), h)_2 + \omega_1(h),$$

und im Fall $r = 2$ gilt mit der Hesse-Matrix H_f von f :

$$f(x + h) = f(x) + (\nabla f(x), h)_2 + \frac{1}{2} (H_f(x) \dot{h}, h)_2 + \omega_2(h).$$

- **TAYLOR-Reihe:** Für eine beliebig oft partiell diff'bare Funktion $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und einem Punkt $x \in D$ heißt die Reihe

$$T_{\infty}^f(x+h) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{D^{\alpha}f(x)}{\alpha!} h^{\alpha}$$

die *Taylor-Reihe* von f in x . Die Funktion f heißt *reell analytisch* in x , wenn die Taylor-Reihe von f in einer Umgebung von x konvergiert mit

$$T_{\infty}^f(x) = f(x).$$

- **hinreichende Konvergenzbedingung für TAYLOR-Reihen:** Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine beliebig oft diff'bare Funktion. Dann ist f in D reell analytisch, wenn gilt:

$$R_{r+1}^f(x, h) \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow \infty), \quad x \in D.$$

Eine hinreichende Bedingung dafür ist, dass die partiellen Ableitungen von f gleichmäßig beschränkt sind:

$$M(f) := \sup_{|\alpha| \geq 0} \left(\sup_{x \in D} |D^{\alpha}f(x)| \right) < \infty.$$

- **Darstellung der TAYLOR-Reihe durch Polynome:** Wird eine beliebig oft stetig diff'bare Funktion $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ in einer Umgebung $K_r(x) \subset D$ durch eine Reihe homogener Polynome $P_{\alpha} = \sum_{|\alpha|=k} x^{\alpha}$ auf \mathbb{R}^n mit dem Grad $k = |\alpha|$ dargestellt, so ist dies die Taylor-Reihe von f in x :

$$f(x+h) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} P_{\alpha}(h), \quad x+h \in K_r(x).$$

Beispiel: Man betrachte die Funktion $f(x_1, x_2) = \frac{1}{1-x_1-x_2} = \frac{1}{1-(x_1+x_2)}$. Hier kann man einen Trick benutzen, indem man in neue Koordinaten $z := x_1 + x_2$ transformiert. So lässt sich die Bildung der Taylor-Reihe auf einen eindimensionalen Fall zurückführen:

$$\underbrace{\frac{1}{1-x_1-x_2}}_{=f(x_1, x_2)} = \frac{1}{1-(x_1+x_2)} = \underbrace{\frac{1}{1-z}}_{=f(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \underline{\underline{(x_1+x_2)^k}}$$

10.3 Satz über implizite Funktionen

Im folgenden wird untersucht, inwieweit durch eine Gleichung

$$F(x, y) = 0, \quad x \in D^x, y \in D^y$$

eine Funktion $f(x) : D^x \rightarrow D^y$ definiert wird, so dass gilt:

$$F(x, f(x)) = 0, \quad \forall x \in D^x.$$

Es stellt sich die Frage, ob diese implizite Funktion f eindeutig definiert ist. Besonders wichtig ist der Spezialfall:

$$F(x) = x - g(y) = 0.$$

Wird hierdurch eindeutig eine Funktion $y = f(x)$ definiert, so gilt: $y = f(x) = g^{-1}(x)$, man findet also die Umkehrfunktion von g .

Satz über implizite Funktion: Seien $D^x \subset \mathbb{R}^n$ und $D^y \subset \mathbb{R}^m$ offene Mengen und $F : D^x \times D^y \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine stetige diff'bare Abbildung. Ferner sei $(\hat{x}, \hat{y}) \in D^x \times D^y$ ein Punkt, mit:

$$F(\hat{x}, \hat{y}) = 0$$

und regulärer Jacobi-Matrix $D_y F(\hat{x}, \hat{y}) \in \mathbb{R}^{m \times m}$.

1. Dann gibt es Umgebungen $U(\hat{x}) \times U(\hat{y}) \subset D^x \times D^y$ und eine stetige Funktion $f : U(\hat{x}) \rightarrow U(\hat{y})$, so dass

$$F(x, f(x)) = 0, \quad x \in U(\hat{x}).$$

2. Die Funktion f ist eindeutig bestimmt, d.h.: Ist $(x, y) \in U(\hat{x}) \times U(\hat{y})$ ein Punkt mit $F(x, y) = 0$, so ist $y = f(x)$.

3. Die Funktion f ist im Punkt \hat{x} diff'bar und ihre Jacobi-Matrix $J_f(\hat{x}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ist gegeben durch:

$$J_f(\hat{x}) = -(D_y F(\hat{x}, \hat{y}))^{-1} D_x F(\hat{x}, \hat{y}).$$

Bemerkungen: Wichtig ist hier vor Allem die Beziehung $U(\hat{x}) \times U(\hat{y}) \subset D^x \times D^y$, die besagt, dass die Umgebungen *kleiner* sind, als die Definitionsbereiche. Dies ermöglicht es auch dann eineu-
tige implizite Funktionen f zu finden, wenn dies auf dem ganzen Definitionsbereich eigentlich nicht
möglich wäre. Als Beispiel betrachte man

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

Diese Gleichung beschreibt alle Punkte auf dem Einheitskreis. Durch formales Auflösen nach y erhält
man:

$$f(x) = y = \pm \sqrt{1 - x^2}.$$

Hier ist f also nicht eindeutig definiert. Betrachtet man aber nur kleine Umgebungen des Punkte $(0, 1)$
oder überhaupt irgendeine Umgebung eines Punkte (\hat{x}, \hat{y}) mit $\hat{x}^2 + \hat{y}^2 = 1$ und $\hat{y} > 0$, so ist dort f
als positiver Zweig eindeutig definiert.

Kleine schmutzige Merkgeln: Die Regularität der $D_y F(\hat{x}, \hat{y}) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ impliziert deren Invertier-
barkeit und ist deswegen nötig, um das Ergebnis $J_f(\hat{x}) = -D_y F(\hat{x}, \hat{y})^{-1} D_x F(\hat{x}, \hat{y})$ zu ermöglichen.
Man kann sich das ganze etwas besser merken, wenn man sich folgende typographische Beziehung
einprägt:

$$J_f(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dF/dx}{dF/dy} = \frac{D_x f}{D_y f}$$

Beispiel: Man betrachte die Funktion

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1.$$

Sie stellt den Einheitskreis im \mathbb{R}^2 dar. Es bleibt zu klären, wo sie implizit eine Funktion $f(x)$ mit
 $F(x, f(x))$ erklärt. Formal erhält man:

$$f(x) = \pm \sqrt{1 - x^2}.$$

Die Ableitung nach y ist: $D_y F(x, y) = 2y$. Dies Jacobi-'Matrix' muss regulär sein, also vollen Rang
haben. Bei Zahlen bedeutet das, dass $D_y F(x, y) \neq 0$, was für alle $y \neq 0$ gegeben ist. Also existiert zu
jedem Punkt auf dem Graphen $(x, y) \in G(F) \subset \mathbb{R}^2$, mit $y \neq 0$ eine offene Umgebung um (x, y) in
der die implizierte Funktion eindeutig bestimmt ist.

10.4 Reguläre/umkehrbare Funktionen

- **Reguläre Abbildungen:** Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine Abbildung $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt *regulär* in $\hat{x} \in D$, wenn sie in einer Umgebung $K_\epsilon(\hat{x}) \subset D$ stetig diff'bar und die Funktionalmatrix $J_f(\hat{x})$ regulär ist (den vollen Rang hat). Sie heißt *regulär auf* D , wenn sie in jedem Punkt $\hat{x} \in D$ regulär ist.
- **Umkehrabbildung:** Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ regulär in $\hat{x} \in D$. Dann gibt es eine offene Umgebung $U(\hat{x}) \subset D$ von \hat{x} , die von f bijektiv auf eine offene Umgebung $U(\hat{y}) \subset \mathbb{R}^n$ von $\hat{y} := f(\hat{x})$ abgebildet wird. Die Umkehrabbildung $f^{-1} : U(\hat{y}) \rightarrow U(\hat{x})$ ist ebenfalls regulär in \hat{y} und für ihre Funktionalmatrix und Funktionaldeterminante gilt:

$$J_{f^{-1}}(\hat{y}) = J_f(\hat{x})^{-1}, \quad |J_{f^{-1}}(\hat{y})| = |J_f(\hat{x})|^{-1}$$

Dieser Satz garantiert die lokale Umkehrbarkeit von Funktionen. Für die globale Umkehrbarkeit würde man benötigen, dass die implizite Funktion g^{-1} überall eindeutig definiert ist, was nur unter sehr eingeschränkten Bedingungen möglich ist.

Eine eineindeutige Abbildung $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit stetiger Umkehrabbildung heißt *Homöomorphismus*. Sind f und f^{-1} stetig diff'bar, so spricht man von einem *Diffeomorphismus*.

Der Satz folgt aus dem Satz über implizite Funktionen, wenn man dort die folgenden Setzungen macht:

$$F(x, y) = x - f(y) \quad \Rightarrow \quad y = f^{-1}(x)$$

Dann gilt für die Jacobi-Matrix $D_y F(x, y)$, die ja regulär sein muss:

$$D_y F(x, y) = -D_y f(y)$$

Dieses entspricht aber schon der Voraussetzung des Satzes über Umkehrabbildungen. Weiter erhält man $D_x F(x, y) = E_n$ und daraus:

$$J_{f^{-1}}(x) = -(D_y F(x, y))^{-1} \cdot D_x F(x, y) = (J_f(x))^{-1}$$

- **offene Abbildungen:** Ist die Abbildung $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ regulär, so ist für jede offene Menge $O \subset D$ auch die Bildmenge $f(O)$ offen. Solche Abbildungen werden auch als *offen* bezeichnet.

10.5 Extremwertaufgaben

10.5.1 Lokale Extrema

In diesem Abschnitt sucht man Bedingungen und Charakterisierungen für lokale Extrema von Funktionen $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

- **Loales Extremum:** Eine Funktion $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ hat in einem Punkt $x \in D$ ein *lokales Extremum*, wenn auf einer Kugelumgebung $K_\epsilon(x) \subset D$ gilt:

$$f(x) = \sup_{y \in K_\epsilon(x)} f(y) \quad \text{oder} \quad f(x) = \inf_{y \in K_\epsilon(x)} f(y).$$

Das Extremum ist strikt, wenn es in $K_\epsilon(x)$ nur im Punkt x angenommen wird.

- **notwendige Extremalbedingung:** Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig diff'bar. Hat f in einem Punkt $x \in D$ ein lokales Extremum, so gilt:

$$\nabla f(x) = 0.$$

- **hinreichende Extremalbedingung:** Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig diff'bar und es sei in einem Punkt $x \in D$:

$$\nabla f(x) = 0.$$

Ist die Hesse-Matrix $H_f(x)$ *positiv definit*, so liegt in x ein striktes lokales Minimum, ist sie *negativ definit*, so liegt in x ein striktes lokales Maximum. Ist sie *indefinit*, so kann in x überhaupt kein lokales Extremum vorliegen.

Der Beweis nutzt die Darstellung der Funktion f durch die Taylor-Entwicklung:

$$f(x+h) = f(x) + \underbrace{(\nabla f(x), h)}_{=0 \text{ (Extremalbedingung)}} + \frac{1}{2} (H_f(x) \dot{h}, h) + \omega_2(h).$$

Ist $H_f(x)$ *positiv definit*, so gilt mit dem kleinsten Eigenwert $\lambda > 0$: $(H_f(x) \dot{h}, h) \geq \lambda \|h\|^2$, $h \in \mathbb{R}^n$. Weiter wird für ein hinreichendes $\|h\|_2 < \delta$ nach Voraussetzung: $\|\omega_2(h)\|_2 < \frac{1}{2} \lambda \|h\|_2^2$. Daraus erhält man dann mit obiger Beziehung:

$$f(x+h) - f(x) = \frac{1}{2} (H_f(x) \dot{h}, h) + \omega_2(h) > \overbrace{\frac{1}{2} \lambda \|h\|^2 - \|\omega_2(h)\|_2}^{>0} > \frac{1}{2} \lambda \|h\|_2^2 - \underbrace{\|\omega_2(h)\|_2}_{< \frac{1}{2} \lambda \|h\|_2^2}$$

10.5.2 Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen

In diesem Abschnitt sucht man Lösungen von Optimierungsaufgaben mit Nebenbedingungen. Seien $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ diff'bare Funktionen auf einer offenen Menge $D \subset \mathbb{R}^n$. Man sucht dann einen Punkt $\hat{x} \in D$ mit:

$$F(\hat{x}) = \inf \{F(x), x \in K_r(\hat{x}), g(x) = 0\}.$$

Die Funktion g beschreibt also die Nebenbedingung, unter der ein \hat{x} gesucht wird, für das $F(\hat{x})$ minimal ist.

- **LAGRANGE-Multiplikatoren:** Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und seien $F, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ zwei stetig diff'bare Abbildungen. Ferner sei $\hat{x} \in D$ ein Punkt, in dem F ein lokales Extremum unter der Nebenbedingung $g(\hat{x}) = 0$ besitzt, d.h. mit der Menge $M := \{x \in D \mid g(x) = 0\}$ gilt auf einer Umgebung $U = K_r(\hat{x}) \subset D$:

$$F(\hat{x}) = \inf_{x \in U \cap M} F(x).$$

Ist dann $\nabla g(\hat{x}) \neq 0$, so gibt es einen sog. *Lagrange-Multiplikator* $\hat{\lambda} \in \mathbb{R}$, so dass:

$$\nabla F(\hat{x}) = \hat{\lambda} \cdot \nabla g(\hat{x}).$$

Man kann die Aussage dieses Satzes auch so interpretieren, dass jeder lokale Minimalpunkt \hat{x} der Funktion F unter der Nebenbedingung $g(\hat{x}) = 0$ notwendig einen sog. *stationären Punkt* der Lagrange Funktion $\mathcal{L}(x, \lambda)$ darstellt:

$$\mathcal{L}(x, \lambda) := F(x) - \lambda g(x), \quad (x, \lambda) \in D \times \mathbb{R}.$$

Das bedeutet, dass für einen solchen Punkt $(\hat{x}, \hat{\lambda})$ gilt:

$$\nabla \mathcal{L}(\hat{x}, \hat{\lambda}) = \nabla F(\hat{x}) - \hat{\lambda} \nabla g(\hat{x}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \nabla F(\hat{x}) = \hat{\lambda} \nabla g(\hat{x})$$

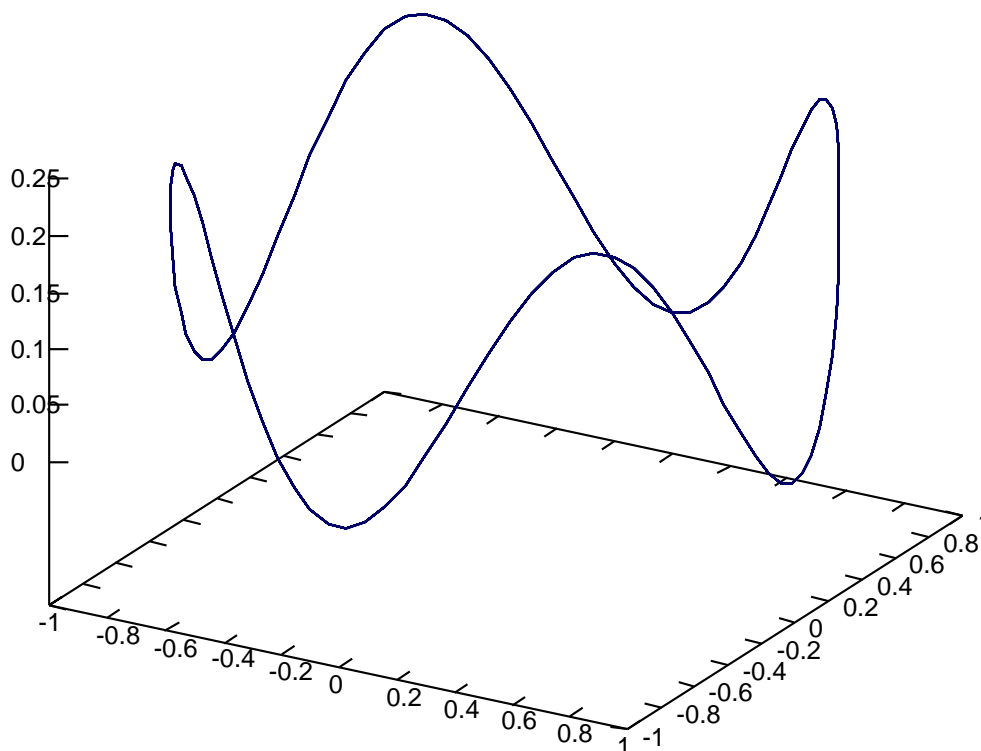
Beispiel: Man bestimme das Maximum der Funktion

$$F(x) := (x_1 \cdot \dots \cdot x_n)^2$$

auf der Sphäre $S_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 = 1\}$. Damit erhält man die Nebenbedingung:

$$g(x) := \sum_{i=1}^n x_i^2 - 1 = 0.$$

Da F und g offensichtlich aus Polynomen bestehen, sind sie stetig diff'bar. Ein Minimum und Maximum wird angenommen, weil die Sphäre S_1 kompakt ist.



Für den Gradienten von g gilt: $\nabla g(x) = 2x \neq 0, x \in S_1$. Damit gelten die Voraussetzungen des Satzes über Lagrange-Multiplikatoren auf der ganzen Sphäre S_1 , also in allen potenziellen Extrempunkten $\hat{x} \in S_1$. D.h. man findet die Punkte \hat{x} als Lösungen des Gleichungssystems:

$$\nabla F(\hat{x}) = \hat{\lambda} \nabla g(\hat{x}) \quad \Leftrightarrow \quad \partial_i F(\hat{x}) = \hat{\lambda} \partial_i g(\hat{x}), \quad i = 1, \dots, n, \quad \hat{x} \in \mathbb{R}^n, \hat{\lambda} \in \mathbb{R}$$

Dieses Gleichungssystem hat für dieses spezielle Problem die Gestalt:

$$\frac{2(\hat{x}_1 \cdot \dots \cdot \hat{x}_n)^2}{\hat{x}_i} = 2\hat{\lambda} \hat{x}_i \quad \text{bzw.} \quad (\hat{x}_1 \cdot \dots \cdot \hat{x}_n)^2 = \hat{\lambda} \hat{x}_i^2, \quad i = 1, \dots, n.$$

Diese Gleichung besagt, dass:

$$\hat{x}_1^2 = \dots = \hat{x}_n^2 = \frac{1}{\hat{\lambda}} (\hat{x}_1 \cdot \dots \cdot \hat{x}_n)^2 \quad \text{und} \quad \underbrace{\sum_{k=1}^n \hat{x}_k^2}_{=1 \text{ (Nebenbed.)}} = \frac{n}{\hat{\lambda}} (\hat{x}_1 \cdot \dots \cdot \hat{x}_n)^2 = 1 \Rightarrow \frac{1}{\hat{\lambda}} (\hat{x}_1 \cdot \dots \cdot \hat{x}_n)^2 = \frac{1}{n}.$$

Damit erhält man durch Einsetzen der rechten in die linke Gleichung:

$$\hat{x}_1^2 = \dots = \hat{x}_n^2 = \frac{1}{n} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\hat{x}_i = \pm \sqrt{\frac{1}{n}}}} \quad \text{mit: } F(\hat{x}) = \pm \frac{1}{n^n}.$$

KAPITEL 11

Kurven- Flächen- und Volumenintegrale

11.1 Inhaltsmessung von Mengen des \mathbb{R}^n

11.1.1 Grundlagen

Im folgenden soll ein Maß für den **Inhalt** $|M|$ von Mengen $M \subset \mathbb{R}^n$ definiert werden. Dieser Inhalt sollte folgende Eigenschaften aufweisen:

1. **Positivität:** $|M| \geq 0$.
2. **Bewegungsinvarianz:** $|M| = |M'|$, wenn M und M' isometrisch (kongruent) sind, d.h. durch eine abstandserhaltende Transformation wie Verschiebung, Drehung und Spiegelung des \mathbb{R}^n ineinander überführt werden können.
3. **Normierung:** Der Einheitswürfel $W_1 = [0, 1]^n$ hat den Inhalt $|W_1| = 1$.
4. **Additivität:** $M \cap N = \emptyset \Rightarrow |M \cup N| = |M| + |N|$.

Es ist zu beachten, dass man zwar im \mathbb{R} und \mathbb{R}^2 jeder Menge einen Inhalt mit obigen Eigenschaften zuordnen kann, die aber schon im \mathbb{R}^3 nicht mehr unbedingt möglich ist.

- **Intervallsummen:** Für Intervallsummen $S \in \mathcal{S}$ mit einer nichtüberlappenden Darstellung $S = \bigcup_{k=1}^m I_k$ ist der Inhalt erklärt durch:

$$|S| := \sum_{k=1}^m |I_k|.$$

Diese Definition hat offensichtlich folgende Eigenschaften:

- $S \subset S' \Rightarrow |S| \leq |S'|$
- $|S \cup S'| \leq |S| + |S'|$
- $S \cap S' = \emptyset \Rightarrow |S \cup S'| = |S| + |S'|$

11.1.2 JORDAN-INHALT

- **JORDAN-INHALT:** Für beschränkte (nicht-leere) Mengen $M \subset \mathbb{R}^n$ sind der *innere Inhalt* $|M|_i$ und der *äußere Inhalt* $|M|_a$ definiert durch:

$$|M|_i := \sup_{S \in \mathcal{S}, S \subset M} |S| \leq \inf_{S \in \mathcal{S}, M \subset S} |S| =: |M|_a.$$

Für die leere Menge setzt man $|\emptyset|_i = |\emptyset|_a := 0$.

Eine Menge heißt *quadrierbar/meßbar im Jordan'schen Sinne* mit dem sog. *Jordan-Inhalt* $|M|$, wenn gilt:

$$|M|_i = |M|_a =: |M|$$

- **JORDAN-NULLMENGEN:** Mengen $M \subset \mathbb{R}^n$ mit (äußerem) Inhalt $|M|_a = 0$ werden *Jordan-Nullmengen* genannt. Man sagt, dass eine Aussage *fast überall* gilt, wenn sie in allen Punkten, bis auf diejenigen aus einer Nullmenge gilt.

Für *Jordan-Nullmengen* gilt:

1. Jede Teilmenge einer Nullmenge ist ebenfalls Nullmenge.
2. Jede endliche Vereinigung von Nullmengen ist wieder Nullmenge; insbesondere endliche Mengen $M = \{x_i | i \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}^n$.
3. Jede in einem echten Untervektorraum von \mathbb{R}^n enthaltene beschränkte Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ ist Nullmenge.

Beispiel: 2-dimensionale Flächen haben zwar ein 2-dimensionales Volumen (Flächeninhalt), aber kein 3-dimensionales.

4. Ist $M \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so ist ihr Graph

$$G(f) := \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^{n+1} | x \in M\}$$

eine $(n + 1)$ -dimensionale Nullmenge.

Endliche Mengen sind Jordan-Nullmengen. Abzählbar unendliche Mengen sind das nicht unbedingt.

Ein Beispiel für eine abzählbar unendliche Menge, die Jordan-Nullmenge ist, ist die zu einer konvergenten Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow x$ gehörende Menge $M := \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Jede Umgebung von x enthält zwar unendlich viele Punkte $x_n \in M$, aber es gibt (aufgrund der Trennungseigenschaft des \mathbb{R}) Umgebungen um die x_n , die keine weiteren $x_k \neq x_n$ enthalten. (???)

Da bei der Definition des Jordan-Inhaltes nur endliche Vereinigungen von Intervallen zugelassen sind, hat z.B. die abzählbare Menge $X = \mathbb{Q}^n \cap [0, L]^n \subset \mathbb{R}^n$ den äußeren Inhalt $|X|_a = L^n$. Würden auch unendliche Intervallsummen zugelassen, so erhielte man etwa für jede abzählbare Menge $A := \{x_i : i \in \mathbb{N}\}$:

Jeder Punkt $x_k \in M$ liegt für jedes $\epsilon > 0$ in einem Würfel I_k mit $|I_k| = \epsilon 2^{-nk}$. Mit unendlichen Vereinigungen gilt also (geometrische Reihe):

$$|A|_a \leq \sum_{k=1}^{\infty} |I_k| = \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon 2^{-nk} = \frac{\epsilon}{1 - 2^{-n}}.$$

Damit wäre also auch die oben definierte Menge X Nullmenge, da sie ja abzählbar ist.

- **Quadrierbarkeit I:** Eine beschränkte Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ ist also genau dann *quadrierbar*, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ Intervallsummen $S_\epsilon, S^\epsilon \in \mathcal{S}$ gibt, mit:

$$S_\epsilon \subset M \subset S^\epsilon, \quad |S_\epsilon| - |S^\epsilon| < \epsilon.$$

- **Quadrierbarkeit II:** Eine beschränkte Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann *quadrierbar*, wenn ihr Rand ∂M Nullmenge ist.

Zum Beweis zeige man, dass $|M|_i + |\partial M|_\alpha = |M|_\alpha$. Also gilt $|M|_i = |M|_\alpha$ nur im Fall $|\partial M|_\alpha = 0$.

- **Lemma über den JORDAN-Inhalt beschränkter Mengen:** Für beschränkte Mengen $M, N \subset \mathbb{R}^n$ gilt:

1. $M \subset N \Rightarrow |M|_\alpha \leq |N|_\alpha, |M|_i \leq |N|_i$.
2. $|M|_\alpha = |\overline{M}|_\alpha, |M|_i = |M^\circ|_i$.
3. $|M \cup N|_\alpha \leq |M|_\alpha + |N|_\alpha$.
4. $M^\circ \cap N^\circ = \emptyset \Rightarrow |M \cup N|_i \geq |M|_i + |N|_i$.
5. $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} |U_\epsilon(M)|_\alpha = |M|_\alpha$.

Die ϵ -Umgebungen von M approximieren also den äußeren Inhalt der Menge.

Beispiel für eine nicht-quadrierbare Menge:

$$M := \{x \in [0, 1]^2 \subset \mathbb{R}^2 \mid x_i \in \mathbb{Q}, i = 1, 2\}$$

Dies ist die Menge aller im Einheitsquadrat des \mathbb{R}^2 enthaltenen Punkte, deren Komponenten in \mathbb{Q} liegen. Man beachte, dass \mathbb{Q} dicht in \mathbb{R} liegt. Damit erhält man:

$$|M|_\alpha = |\overline{M}|_\alpha = |[0, 1]^2| = 1, \quad |M|_i = |M^\circ|_i = |\emptyset|_i = 0 \quad \Rightarrow \quad M \text{ ist nicht quadrierbar.}$$

- Für den Jordan-Inhalt gilt:

1. Ist M quadrierbar, so gilt $|M| = |M^\circ| = |\overline{M}|$. Insbesondere ist auch jedes beschränkte offene, oder halboffene Intervall quadrierbar.

Beweis-Idee: Es gilt $\partial M = \partial M^\circ = \partial \overline{M}$. Damit sind M° und \overline{M} quadrierbar. Daraus leitet man dann leicht die z.z. Beziehung her.

2. Für quadrierbare Mengen $M, N \subset \mathbb{R}^n$ sind auch Vereinigung $M \supset N$, Schnitt $M \cap N$ und Differenz $M \setminus N$ quadrierbar.

Beweis-Idee: Sei A eine der genannten Mengen. Dann gilt: $\partial A \subset \partial M \cup \partial N$, da $|\partial M| = |\partial N| = 0$ ist also auch $|\partial A| = 0$ und A damit quadrierbar.

- **Eigenschaften des JORDAN-Inhaltes:** Für quadrierbare Mengen $M, N \subset \mathbb{R}^n$ gilt:

1. *Monotonie:* $M \subset N \Rightarrow |M| \leq |N|$.
2. *Subadditivität:* $|M \supset N| \leq |M| + |N|$.
3. *Additivität:* $M^\circ \cap N^\circ = \emptyset \Rightarrow |M \cup N| = |M| + |N|$.
4. $M \subset N \Rightarrow |N \setminus M| = |N| - |M|$.

11.1.3 Würfelsummen

Für manche Beweise und zur Anschauung ist es manchmal einfacher statt den Allgemeinen Intervallsummen sog. Würfelsummen aus lauter gleichen Intervallwürfeln zu verwenden. Diese werde in diesem Abschnitt definiert und ihre Beziehung zum Jordan-Inhalt erläutert.

- **Würfel:** Die Würfel im \mathbb{R}^n mit den Eckpunkten $2^{-k} \cdot p$, $p \in \mathbb{Z}^n$, der Kantenlänge 2^{-k} und dem Inhalt 2^{-nk} bilden die Menge \mathcal{W}_k der Würfel k -ter Stufe.

Die Würfel 0-ter Stufe sind gerade die Einheitswürfel. Ihre Kantenlänge ist $2^{-0} = 1$. Ihre Eckpunkte liegen auf dem 'Gitter' der Punkte mit Komponenten aus den ganzen (positiven und negativen) Zahlen in \mathbb{R}^n . Diese sind die Punkte $p \in \mathbb{Z}^n$. Ein Einheitswürfel erstreckt sich jeweils zwischen zwei benachbarten solcher Punkte. Nach definition sind beliebige Würfel entweder gleich, oder disjunkt, also:

$$W_1 \cap W_2 \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad W_1 = W_2 = W_1 \cap W_2.$$

Zur Konstruktion der weiteren Einheitswürfel wird jeweils die Länge der Kanten halbiert. **Beispiel:**

- $W_0 := [0, 1] \times [0, 1] \in \mathcal{W}_0$ über \mathbb{R}^2 . ist der 2-dimensionale Einheitswürfel.
 - $W_1 := [0, \frac{1}{2}] \times [0, \frac{1}{2}] \in \mathcal{W}_1$ über \mathbb{R}^2 . Es gilt $W_1 \subset W_0$
 - $W_2 := [0, \frac{1}{4}] \times [0, \frac{1}{4}] \in \mathcal{W}_2$ über \mathbb{R}^2 . Es gilt $W_2 \subset W_1 \subset W_0$
 - usw. ad infinitum
- **Würfelsummen:** Die Vereinigung solcher Würfel heißt *Würfelsumme*. Für eine beschränkte Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ setzt man:

$$M_k := \bigcup_{W \in \mathcal{W}_k, W \subset M} W \quad \text{und} \quad M^k := \bigcup_{W \in \mathcal{W}_k, W \cap M \neq \emptyset} W$$

Die Würfelsummen M_k, M^k sind als spezielle Intervallsummen quadrierbar. Aus dieser Definition folgt direkt:

$$M_k \subset M_{k+1} \subset M \subset M^{k+1} \subset M^k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Für die Inhalte gilt:

$$|M_k| \leq |M| \leq |M^k|.$$

M_k enthält alle Würfel, die ganz in der Menge liegen. Es approximiert also die Menge 'von innen'. M^k enthält dagegen alle Würfel in denen auch nur ein kleiner Teil der Menge M liegt, approximiert die Menge also von außen.

- **beschränkte Mengen und Würfelsummen:** Für beschränkte Mengen $M \subset \mathbb{R}^n$ gilt:

$$|M|_i = \lim_{k \rightarrow \infty} |M_k|, \quad |M|_a = \lim_{k \rightarrow \infty} |M^k|.$$

11.1.4 Abbildungen von Mengen

Dieser Abschnitt behandelt Bedingungen unter denen die Eigenschaften offen und quadrierbar einer Menge unter Abbildungen $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ erhalten bleiben. Die entscheidende Eigenschaft ist hier die *Lipschitz-Stetigkeit*. Einfache Stetigkeit reicht hier nicht aus.

- Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ (nicht leer) beschränkt und $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Lipschitz-stetige Abbildung mit Lipschitz-Konstante L . Dann gilt für die Bildmenge $\Phi(D)$:

$$|\Phi(D)|_\alpha \leq \alpha |D|_\alpha, \quad \alpha := (L\sqrt{n})^n.$$

- Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ (licht leer) offen und quadrierbar. Die Abbildung $\Phi : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ sein in \overline{D} L -stetig und in D regulär (d.h.: stetig diff'bar mit $\det \Phi'(x) \neq 0$).

1. Die Bildmenge $\Phi(D)$ ist offen und quadrierbar und es gilt:

$$\overline{\Phi(D)} = \Phi(\overline{D}), \quad \partial\Phi(D) \subset \Phi(\partial D).$$

2. Ist Φ in D injektiv, so gilt $\partial\Phi(D) = \Phi(\partial D)$. Ferner ist für jede quadrierbare Teilmenge $A \subset \overline{D}$ auch die Bildmenge $\Phi(A)$ quadrierbar.

- Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ nicht leer und $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine L -stetige Abbildung. Dann besitzt Φ eine L -stetige Fortsetzung $\overline{\Phi} : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\overline{\Phi}|_D = \Phi$.

Damit ist der letzte Satz auch anwendbar, wenn Φ nur auf D definiert ist und dort L -stetig.

- **affin-lineare Abbildungen und Quadrierbarkeit:** Es sei $D \subset \mathbb{R}^n$ eine quadrierbare Menge, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine $n \times n$ -Matrix und $b \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor. Dann ist auch die Bildmenge $\Phi(D)$ der wie folgt definierten affin-linearen Abbildung quadrierbar:

$$\Phi(x) := Ax + b$$

Es gilt:

$$|\Phi(D)| = |\det A| \cdot |D|.$$

Bemerkungen zum Beweis: Jede Matrix reguläre A hat eine Darstellung $A = Q_1 \Lambda Q_2$, mit orthonormalen Matrizen Q_1, Q_2 und einer Diagonalmatrix Λ , deren Diagonalelemente $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sind. Damit gilt:

$$|\det A| = |\det(Q_1 \Lambda Q_2)| = |\det \Lambda| = |\lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n|.$$

Nun sind orthonormale Abbildungen abstandserhaltend. Eine Kugel $K(0)$ wird also wieder auf sich selbst abgebildet. Für den hier betrachteten Fall erhält man also:

$$|\Phi(K)| = |Q_1 \Lambda Q_2(K)| = |DQ_2(K)| = |\lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n| \cdot |Q_2(K)| = |\lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n| \cdot |K| = |\det A| \cdot |K|$$

Für den letzten Schritt wurde benutzt, dass eine Diagonalmatrix nur eine Streckung/Stauchung entlang der Koordinatenachsen beschreibt.

- **Bewegungsinvarianz:** Der Jordan-Inhalt ist bewegungsinvariant, d.h. jede affin-lineare Abbildung der Form $\Phi(x) = Qx + b$ mit einer orthonormalen Matrix $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und einem Vektor $b \in \mathbb{R}^n$ führt quadrierbare Mengen in quadrierbare Mengen über und lässt den Inhalt unverändert.

11.2 Das RIEMANN-Integral im \mathbb{R}^n

Im folgenden wird das n -dimensionale Riemann-Integral von Funktionen $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eingeführt. Für den Definitionsbereich gilt dabei: $D \subset \mathbb{R}^n$ ist eine beliebige, nicht-leere und beschränkte, quadrierbare Menge. Viele der Definitionen und Begriffe haben eine direkte Entsprechung im 1-dimensionalen Fall.

11.2.1 Definition und Grundlagen

- **Zerlegung:** Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ eine beliebige nicht-leere und beschränkte, quadrierbare Menge. Eine *endliche Zerlegung* $Z = \{B_i, i = 1, \dots, m\}$ der Menge D in quadrierbare Teilmengen $B_i \subset M$ hat die Eigenschaften:

$$D = \bigcup_{i=1}^m B_i, \quad B_i^\circ \cap B_j^\circ = \emptyset, \quad i \neq j.$$

Die Durchschnitte dürfen also höchstens Nullmengen sein.

Die Menge aller solcher Zerlegungen von D nennt man $\mathcal{Z}(D)$. Die *Feinheit* $|Z|$ einer Zerlegung $Z = \{B_i\} \in \mathcal{Z}(D)$ definiert man durch den Durchmesser des größten Elementes der Zerlegung:

$$|Z| := \max_{B_i \in Z} (\text{diam}(B_i))$$

Eine *Verfeinerung* $Z' \in \mathcal{Z}(D)$ einer Zerlegung $Z \in \mathcal{Z}(D)$ (in Zeichen $D' \subset D$) ist eine Zerlegung, in der alle B'_j Teilmengen gewisser $B_i \in Z$ sind, die also *vollständig in Z liegt, aber evtl. weniger 'Raum abdeckt'*.

- **Ober- und Untersumme:** Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion mit dem wie oben definierten Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}^n$. Zu einer Zerlegung $Z \in \mathcal{Z}(D)$ definiert man die zugehörige *Ober- und Untersumme*:

$$\underline{S}_Z(f) := \sum_{i=1}^m \inf_{x \in B_i} (f(x)) \cdot |B_i|, \quad \bar{S}_Z(f) := \sum_{i=1}^m \sup_{x \in B_i} (f(x)) \cdot |B_i|$$

Für eine Zerlegung Z mit Verfeinerung $Z' \subset Z$ gilt dann:

$$\underline{S}_Z(f) \leq \underline{S}_{Z'}(f), \quad \bar{S}_{Z'}(f) \leq \bar{S}_Z(f)$$

- **Ober- und Unterintegral:** Man definiert dann *Ober- und Unterintegral* mit den Bezeichnungen aus den ersten zwei Punkten:

$$\underline{J}(f) = \int_{\underline{D}} f(x) dx := \sup_{Z \in \mathcal{Z}(D)} \underline{S}_Z, \quad \bar{J}(f) = \int_{\bar{D}} f(x) dx := \inf_{Z \in \mathcal{Z}(D)} \bar{S}_Z$$

Es folgt direkt aus dieser Definition:

$$\underline{J}(f) \leq \bar{J}(f), \quad \bar{J}(f) = -\underline{J}(-f)$$

- **RIEMANN-Integral im \mathbb{R}^n :** Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ quadrierbar. Sind für eine beschränkte Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ihr Ober- und Unterintegral gleich, so heißt der gemeinsame Wert das *Riemann-Integral* von f über D :

$$\int_D f(x) dx := J(f) = \underline{J}(f) = \bar{J}(f).$$

Die Funktion f heißt damit *Riemann-integrierbar*. Die Menge der Riemann-integrierbaren Funktionen über D wird mit $R(D)$ bezeichnet.

- **RIEMANN'sches Integrabilitätskriterium:** Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ quadrierbar und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. f ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ eine Zerlegung $Z_\epsilon \in \mathcal{Z}(D)$ gibt, mit:

$$\bar{S}_{Z_\epsilon}(f) - \underline{S}_{Z_\epsilon}(f) < \epsilon.$$

- **RIEMANN-Summen:** Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ quadrierbar und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Dann konvergiert für jede Folge von Zerlegungen $Z_k \in \mathcal{Z}(D)$ mit $|Z_k| \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$):

$$\overline{S}_{Z_k}(f) \rightarrow \overline{J}(f), \quad \underline{S}_{Z_k}(f) \rightarrow \underline{J}(f) \quad (k \rightarrow \infty).$$

Es ist f R-integrierbar genau dann, wenn für jede Folge von Zerlegungen $Z_k \in \mathcal{Z}(D)$ mit $|Z_k| \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$) alle zugehörigen Riemann-Summen gegen den selben Limes konvergieren. Dieser ist dann gerade das R-Integral von f über D :

$$RS_{Z_k}(f) \rightarrow J(f) = \int_D f(x) dx \quad (k \rightarrow \infty).$$

- **Eigenschaften des RIEMANN-Integrals:** Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ quadrierbar. Das R-Integral über D besitzt die Eigenschaften:

1. Eine R-integrierbare Funktion f ist auch auf jeder quadrierbaren Teilmenge von D R-integrierbar.

2. *Linearität:* Für $f, g \in R(D)$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist $\alpha f + \beta g \in R(D)$ und es gilt:

$$J(\alpha f + \beta g) = \alpha J(f) + \beta J(g).$$

3. *Monotonie:* Für $f, g \in R(D)$ folgt aus $f(x) > g(x), x \in D$:

$$J(f) \geq J(g).$$

4. Ist $D = D_1 \cup D_2$ mit zwei quadrierbaren Mengen $D_1^\circ \cap D_2^\circ = \emptyset$, so gilt

$$J_D(f) = J_{D_1}(f) + J_{D_2}(f).$$

Die Aussagen 3,4 gelten auch für Ober- und Untersummen.

Ist eine Funktion f integrierbar über D mit $m \leq f(x) \leq M, x \in D$ und $\varphi : [m, M] \rightarrow \mathbb{R}$ eine L-stetige Funktion, so ist auch die Komposition $\varphi \circ f$ integrierbar. Desweiteren sind dann integrierbar:

$$|f|, f_+, f_-, fg, \max\{f, g\}, \min\{f, g\}.$$

Im Falle $\inf_{x \in D} f(x) > 0$ ist auch $1/f$ integrierbar.

- **Integrierbarkeit der charakteristischen Funktion:** Seien $A \subset D \subset \mathbb{R}^n$ quadrierbare Mengen. Dann ist die charakteristische Funktion χ_A der Menge A über D integrierbar und es gilt:

$$\int_D \chi_A(x) dx = |A|.$$

- **JORDAN-NULLMENGEN und Integrierbarkeit:** Auf einer Jordan-Nullmenge $N \subset \mathbb{R}^n$ ist jede beschränkte Funktion $f : N \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar und es gilt:

$$\int_N f(x) dx = 0.$$

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ quadrierbar und $f : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt. Dann ist f entweder über alle drei Mengen $D^\circ \subset D \subset \overline{D}$ integrierbar, oder über keine von diesen. Im ersten Fall gilt:

$$\int_D f(x) dx = \int_{D^\circ} f(x) dx = \int_{\overline{D}} f(x) dx.$$

- **RIEMANN-Integrierbarkeit stetiger Funktionen:** Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ quadrierbar und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt und in D fast überall stetig, d.h. überall, bis auf eine Nullmenge $N \subset D$. Dann ist f integrierbar über D . Insbesondere folgt aus $f \in C(D)$ und $\sup_{x \in D} |f(x)| < \infty$ die Integrierbarkeit von f .
- **Dreiecksungleichung:** Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ quadrierbar und f integrierbar über D . Es gilt:

$$\left| \int_D f(x) dx \right| \leq \int_D |f(x)| dx.$$

11.2.2 Schranken- und Mittelwertsätze

- **Schranksatz:** Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ quadrierbar. Ist f integrierbar über D und ist $m \leq f(x) \leq M, x \in D$, so gilt:

$$m \cdot |D| \leq \int_D f(x) dx \leq M \cdot |D|.$$

Allgemeiner gilt für f, g integrierbar über D mit $g \geq 0$:

$$m \cdot \int_D g(x) dx \leq \int_D f(x)g(x) dx \leq M \cdot \int_D g(x) dx.$$

Die erste Beziehung folgt mit der speziellen *Gewichtsfunktion* $g(x) = 1$.

- **Mittelwertsatz:** Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ quadrierbar und f auf D integrierbar. Dann gibt es eine Zahl $\mu \in \mathbb{R}$ mit $\inf_{x \in D} f(x) \leq \mu \leq \sup_{x \in D} f(x)$, so dass:

$$\int_D f(x) dx = \mu |D|.$$

Ist darüberhinaus D kompakt und zusammenhängend und ist f stetig, so gibt es ein $\xi \in D$ mit $\mu = f(\xi)$.

11.2.3 Zusammenhang zwischen RIEMANN-Integral und JORDAN-Inhalt

- **Ordinatenmenge/Normalbereich:** Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ quadrierbar und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine nicht-negative Funktion. Dann ist die zugehörige *Ordinatenmenge* definiert als:

$$M(f) := \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \in D, 0 \leq t \leq f(x)\}.$$

Für Funktionen $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ entspricht dies der Fläche unter dem Funktionsgraphen.

Allgemeiner definiert man für zwei Funktionen $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f \geq g$ den sog. *Normalbereich*:

$$M(f, g) := \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \in D, g(x) \leq t \leq f(x)\}.$$

Für Funktionen $f, g : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ entspricht dies der Fläche zwischen den Funktionsgraphen.

- Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ quadrierbar und $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt und integrierbar mit $f \geq g$. Dann ist der Normalbereich $M(f, g) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ in \mathbb{R}^{n+1} quadrierbar mit:

$$|M(f, g)| = \int_D (f(x) - g(x)) dx.$$

Speziell gilt für $f \geq 0$:

$$|M(f)| = \int_D f(x) \, dx.$$

Dies impliziert auch, dass der Graph $G(f)$ einer integrierbaren Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Jordan-Nullmenge in \mathbb{R}^{n+1} ist.

11.2.4 Vertauschung von Grenzprozessen

- Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ quadrierbar und $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge von über D integrierbaren Funktionen f_k , welche gleichmäßig gegen eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ konvergiert. Dann ist auch f integrierbar und es gilt:

$$\int_D f(x) \, dx = \int_D \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) \, dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_D f_k(x) \, dx.$$

- Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ quadrierbar und $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge von über D integrierbaren Funktionen f_k , für welche die Reihe

$$f(x) := \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$$

auf D gleichmäßig konvergiert. Dann ist auch f integrierbar auf D und es gilt:

$$\int_D f(x) \, dx = \int_D \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \, dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_D f_k(x) \, dx$$

11.2.5 Satz von FUBINI

- **Satz von FUBINI:** Seien $I_x \subset \mathbb{R}^n$ und $I_y \subset \mathbb{R}^m$ kompakte Intervalle mit dem kartesischen Produkt $I = I_x \times I_y \subset \mathbb{R}^{n+m}$ und f eine auf I integrierbare Funktion. Ferner seien für jedes feste $y \in I_y$ und $x \in I_x$ die Funktionen $f(\cdot, y)$ bzw. $f(x, \cdot)$ integrierbar über I_x bzw. I_y . Dann sind auch die Funktionen

$$F_x(y) := \int_{I_x} f(x, y) \, dx, \quad F_y(x) := \int_{I_y} f(x, y) \, dy$$

integrierbar über I_y bzw. I_x und es gilt:

$$\int_I f(x, y) \, d(x, y) = \int_{I_y} \left(\int_{I_x} f(x, y) \, dx \right) dy = \int_{I_x} \left(\int_{I_y} f(x, y) \, dy \right) dx.$$

Die Aussage dieses Satzes gilt natürlich auch für die Zerlegung in mehr als zwei kompakte Intervalle. Die Integrationsreihenfolge kann dann beliebig vertauscht werden.

Zur Anwendung des Satzes auf allgemeine Definitionsbereiche D auf denen f stetig ist, wird D in ein Intervall $I = I_x \times I_y$ eingebettet und außerhalb von D durch 0 fortgesetzt:

$$\hat{f}(x, y) := \begin{cases} f(x, y), & (x, y) \in D \\ 0, & (x, y) \in I \setminus D \end{cases} \Rightarrow \int_D f(x, y) \, d(x, y) = \int_{I_x \times I_y} \hat{f}(x, y) \, d(x, y)$$

11.2.6 Integraltransformationen

- **Eindimensionaler Fall:** Ein Intervall $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ werde durch ein Funktion φ auf ein Intervall $\varphi(I) = [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ abgebildet, wobei $\varphi(a) = \alpha$, $\varphi(b) = \beta$ gelte. Ist φ stetig diff'bar und monoton wachsend/fallend (d.h. $\varphi' > 0/\varphi' < 0$), so gilt für jede über $\varphi(I)$ integrierbare Funktion $f: \varphi(I) \rightarrow \mathbb{R}$ die Transformationsformel:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(y) dy = \pm \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y) dy = \int_a^b f(\varphi(x)) (\pm \varphi'(x)) dx.$$

Insgesamt gilt dann also für $\varphi'(x) \neq 0$:

$$\int_{\varphi(I)} f(y) dy := \int_{\alpha}^{\beta} f(y) dy = \int_a^b f(\varphi(x)) |\varphi'(x)| dx.$$

Für affin-lineare Abbildungen $\varphi(x) = \alpha x + b$ gilt also: $dy = |\varphi'(x)| dx = |\alpha| dx$.

- **Transformationssatz:** Die Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ sei offen und quadrierbar und die Funktion $\Phi: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig diff'bar, injektiv und Lipschitz-stetig. Dann ist die Menge $\Phi(D)$ quadrierbar und für jede Funktion über $\Phi(D)$ integrierbare f ist die Funktion

$$F := f(\Phi(\cdot)) \cdot |\det \Phi'(\cdot)|: D \rightarrow \mathbb{R}$$

integrierbar. Für jede quadrierbare Teilmenge $M \subset D$ gilt die Substitutionsregel

$$\int_{\Phi(M)} f(y) dy = \int_M f(\Phi(x)) \cdot |\det \Phi'(x)| \cdot dx.$$

- Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und quadrierbar und $\Phi: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetig diff'bare, Lipschitz-stetige Abbildung. Für jede quadrierbare Teilmenge $M \subset D$ gilt dann:

$$|\Phi(M)|_{\alpha} \leq \int_M |\det \Phi'(x)| dx.$$

- **Standard-Koordinatensysteme:**

1. *ebene Polarkoordinaten:* $(x, y) = \Phi(r, \theta) := (r \cos \theta, r \sin \theta)$

$$\Rightarrow |\det J_{\Phi}(r, \theta)| = \begin{vmatrix} \cos \theta & r \sin \theta \\ -\sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r$$

$$\Rightarrow d(x, y) = r dr d\theta.$$

2. *Zylinderkoordinaten:* $(x, y, z) = \Phi(r, \theta, z) := (r \cos \theta, r \sin \theta, z)$

$$\Rightarrow d(x, y, z) = r dr d\theta dz.$$

3. *Kugelkoordinaten:* $(x, y, z) = \Phi(r, \theta, \varphi) := (r \cos \theta \sin \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \varphi)$

$$\Rightarrow d(x, y, z) = r^2 \sin \varphi dr d\theta d\varphi.$$

- **Rotationskörper:** Das Volumen $|D_{\varphi}|$ des Rotationskörpers in \mathbb{R}^3 mit der Randkurve $x = \varphi(z)$, $z \in [a, b]$ ist bestimmt durch:

$$|D_{\varphi}| = \pi \int_a^b \varphi(z)^2 dz.$$

- **Kugelvolumen:** Das Volumen der Einheitskugel des \mathbb{R}^n

$$K_1^{(n)}(0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 < 1\}$$

ist gegeben durch die folgenden Formeln für gerades $n = 2m$ bzw. ungerades $n = 2m + 1$:

$$|K_1^{(n)}(0)| = \frac{\pi^m}{m!}, \quad |K_1^{(n)}(0)| = \frac{2^{m+1}\pi^m}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2m+1)}.$$

Die Volumen der Kugeln scheinen mit steigender Dimension anzusteigen. Dies ist aber ein Trugschluss. Obige Formeln zeigen, dass $|K_1^{(n)}(0)| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). Die Volumina der Würfel $[-1, 1]^n \subset \mathbb{R}^n$, mit 2^n gegen unendlich gehen. Diese Volumina entsprechen den Volumina der Einheitskugeln bzgl. der Maximumsnorm!

11.2.7 Uneigentliches RIEMANN-Integral

- **Ausschöpfende Folgen von Mengen:** Für eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt eine monoton wachsende Folge $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von quadrierbaren Teilmengen $M_k \subset M$ *ausschöpfend*, wenn für jede r -Kugel $K_r(0) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 < r\}$ gilt:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |(M \cap K_r(0)) \setminus M_k|_a = 0.$$

- **uneigentliches RIEMANN-Integral:** Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ eine beliebige Menge (nicht notwendig beschränkt). Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt über D *uneigentlich integrierbar*, wenn mit der Notation

$$Q_f := \{M \subset D \mid M \text{ quadrierbar und } f \text{ integrierbar über } M\}$$

gilt:

$$\int_M |f(x)| dx \leq \gamma, \quad M \in Q_f,$$

und wenn es eine bzgl. D ausschöpfende Folge von Mengen $D_k \subset Q_f$ gibt mit

$$\int_D f(x) dx := \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{D_k} f(x) dx.$$

Der Limes heißt dann das *uneigentliche Riemann-Integral* von f über D .

- Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ eine beliebige Menge und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uneigentlich integrierbar. Dann ist für jede ausschöpfende Folge $(D_k)_{k \in \mathbb{N}}$

$$\int_D f(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{D_k} f(x) dx.$$

D.h. das uneigentliche Integral ist unabhängig von der gewählten ausschöpfenden Folge.

11.3 Parameterabhängige Integrale

Im folgenden werden parameterabhängige Integrale der folgenden Form betrachtet:

$$F(x) := \int_{D_y} f(x, y) dy, \quad x \in D_x$$

- Seien $D_x \subset \mathbb{R}^m$, $D_y \subset \mathbb{R}^n$ quadrierbar und D_y kompakt. Dann gilt:
 1. Ist f in $D_x \times D_y$ stetig, so ist F in D_x stetig.
 2. Ist D_x offen und sind f und $\nabla_x f$ stetig in $D_x \times D_y$, so ist F in D_x stetig partiell diff'bar und es gilt:

$$\nabla F(x) = \int_{D_y} \nabla_x f(x, y) dy, \quad x \in D_x.$$

3. Ist D_x offen und ist f in $D_x \times D_y$ k -mal stetig partiell diff'bar bzgl. x , so ist F k -mal stetig partiell diff'bar in D_x .
- **Rotationsfreiheit von Gradientenfeldern:** Eine auf einer offenen Kugel $D \subset \mathbb{R}^3$ stetig diff'bare Vektorfunktion $v : B \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist genau dann Gradient einer stetig diff'baren Funktion $f : B \rightarrow \mathbb{R}$, d.h. $v = \nabla f$, wenn $\nabla \times v = 0$ gilt. D.h. es gilt:

$$\text{rot}(\text{grad } f(x)) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ ist zweimal stetig diff'bar.}$$

- ϵ -Umgebungen
 - einer Menge, 10
 - eines Punktes, 10
- Abbildung
 - affin lineare, 70
- abgeschlossene Menge, 10
- Abschluss einer Menge, 11
- Abstand, 6
 - zu einer Menge, 7
- affin-lineare Abbildung, 70
- Äquivalenzklasse
 - Definition, 5
 - Satz über, 5
- Äquivalenzrelation, 5
- äußere Inhalt, 67
- Ausschöpfende Folgen von Mengen, 76
- Banach-Raum, 12
- Beispiel
 - nicht-quadrierbare Menge, 68
- beschränkt
 - beschränkte Mengen, 10
- bewegungsinvariant, 70
- Bolzano-Weierstrass-Charakterisierung, 12
- charakteristische Funktion, 5
- Dreiecksungleichung, 73
- Durchmesser einer Menge, 9
- Fubini, Satz von, 74
- Gradientenfelder, 77
- Heine-Borel'sche Überdeckungseigenschaft, 12
- Heine-Borel, Satz von, 12
- hermite'sche Matrizen, 8
- Inhalt
 - äußerer, 67
 - innerer, 67
- Inhalt, intuitiv, 66
- innere Inhalt, 67
- Integral im \mathbb{R}^n , 71
- Intervallschachtelung, 9
- Intervallschachtelungseigenschaft, 9
- Intervallsumme, 66
- Jordan-Inhalt, 67
 - Bewegungsinvarianz, 70
 - Differenz, 68
 - Eigenschaften, Sätze, 68
 - Schnitt, 68
 - Vereinigung, 68
- Jordan-Nullmenge, 67, 72
- kompakte Menge, 11
- Koordinaten
 - Kugelkoordinaten, 75
 - Polarkoordinaten, ebene, 75
 - Zylinderkoordinaten, 75
- Kronecker-Symbol, 4
- Kugelkoordinaten, 75
- Kugelumgebung, 10
- Kugelvolumen, 76
- Landau-Symbol, 4
- Lebesgue-Nullmenge, 12
- Lipschitz-stetig, 70
- Matrix
 - hermite'sch, 8
 - orthogonal, 8
 - unitar, 8
- Matrixnorm, 7

- natürliche, 7
- Menge
 - abgeschlossen, 10
 - Abschluss, 11
 - beschränkt, 10
 - kompakt, 11
 - offen, 10
 - offener Kern, 11
 - Rand, 11
 - relativ offen, 12
 - zusammenhängend, 12
- Metrik, 6
- Mittelwertsatz
 - der Integration im \mathbb{R}^n , 73
- Natürliche Matrixnorm, 7
- Newton-Verfahren, 31
- Norm, 5
 - l_1 -Norm, 6
 - l_p -Norm, 6
 - euklidische Norm, 6
 - Frobenius-Matrixnorm, 7
 - Matrixnorm, 7
 - Maximale-Spaltensummen-Norm, 7
 - Maximale-Zeilensummen-Norm, 7
 - Maximumsnorm, 6
 - Spektralnorm, 7
- Normalbereich, 73
- Normäquivalenz, 5
- Nullmenge, 67, 72
 - Lebesgue, 12
- Nullstelle
 - Approximation nach Newton, 31
- Oberintegral im \mathbb{R}^n , 71
- Obersumme im \mathbb{R}^n , 71
- offene Menge, 10
- offener Kern, 11
- Ordnatenmenge, 73
- orthogonale Matrizen, 8
- Polarkoordinaten, ebene, 75
- positiv definit, 9
- quadrierbar, 68
- Rand einer Menge, 11
- Raum
 - Banach, 12
- relativ offen, 12
- Riemann'sches Integrabilitätskriterium, 71
- Riemann-Integral im \mathbb{R}^n , 71
 - Eigenschaften, 72
 - uneigentliches, 76
- Riemann-Summe, 72
- Rotationsfreiheit, 77
- Rotationskörper, 75
- Satz
 - Fubini, 74
- Schrankensatz (\mathbb{R}^n), 73
- Spektralnorm, 7
- stetig
 - Lipschitz-stetig, 70
- Störungssatz, 9
- Symbole
 - $RS_{Z_k}(f)$, 72
 - δ_{kl} , 4
 - $O(\cdot)$, 4
 - $o(\cdot)$, 4
 - $\overline{S}_Z(f), \underline{S}_Z(f)$, 71
 - \int, \int , 71
- Transformationssatz, 75
- Trennungseigenschaft, 9
- Überdeckungseigenschaft, 12
- Umgebung
 - Satz über, 10
- uneigentliches Riemann-Integral (\mathbb{R}^n), 76
- Ungleichung
 - Bernoulli'sche Ungleichung, 6
 - Dreiecksungleichung, 73
 - Holder'sche Ungleichung, 6
 - Minkowski'sche Ungleichung, 6
 - Young'sche Ungleichung, 6
- unitäre Matrizen, 8
- Unterintegral im \mathbb{R}^n , 71
- Untersumme im \mathbb{R}^n , 71
- Vollständigkeit, 9
- Würfel, 69
- Würfelsumme, 69
- Zerlegung, 71
- zusammenhängend, 12
- Zylinderkoordinaten, 75