

Stoffzusammenfassung/Skript: Elektrodynamik und Relativitätstheorie

Jan Krieger

<http://www.jkrieger.de> <jan@jkrieger.de>

23. Juli 2006

Inhaltsverzeichnis

I. Mathematische Grundlagen	5
1. Koordinatensysteme	6
1.1. Polarkoordinaten	6
1.2. Zylinderkoordinaten	6
1.3. Kugelkoordinaten	6
1.4. Zusammenhang zwischen den Koordinaten	7
1.5. allg. Koordinatentransformation	7
2. Spezielle Funktionen	8
2.1. gewöhnliche LEGENDRE'sche Polynome	8
2.2. zugeordnete LEGENDRE'sche Funktionen	9
2.3. Kugelflächenfunktionen	10
3. Differentialoperatoren	12
3.1. Kartesische Koordinaten $\vec{u} = (x, y, z)$	12
3.2. Zylinder-Koordinaten $\vec{u} = (r, \phi, z)$	12
3.3. Kugel-Koordinaten $\vec{u} = (r, \theta, \phi)$	13
3.4. Sätze und Rechenregeln für den $\vec{\nabla}$ -Operator	13
4. Integralsätze	14
5. Sätze aus der Vektorfeldtheorie	15
6. Inhomogene Wellengleichungen	16
6.1. Homogene Wellengleichung	16
6.2. Inhomogene Wellengleichung	17
II. Elektrizität und Magnetismus	18
7. Elektrostatik	19
7.1. Kraftgesetz, Feld	19
7.2. Elektrisches Potential	20
7.3. Beispiele: elektrisches Feld und Potential	20
7.3.1. Felddurchgang durch eine Platte	21
7.3.2. Stetigkeitsbedingungen bei Leitern	21
7.3.3. Plattenkondensator	22
7.3.4. Kugelkondensator	22
7.3.5. Zylinderkondensator	23
7.3.6. geladener Stab	23
7.3.7. Dipol	24
7.4. Green'sche Theoreme	26
7.5. Beispiele: Green'sche Theoreme	28
7.5.1. Geerdete Kugel im Feld einer Punktladung	28
7.5.2. Lösung der Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten	29
7.5.3. Metallkugel im homogenen elektrischen Feld	31
7.6. Multipolentwicklung	32

8. Magnetostatik	35
8.1. Elektrischer Strom	35
8.2. Kraftgesetz und Feldgleichungen	35
8.3. Vektorpotential	37
8.4. Multipolwicklung und Dipolmoment	37
8.5. Beispiele	38
8.5.1. Homogenes Magnetfeld	38
8.5.2. Magnetischer Dipol	38
8.5.3. Stromdurchflossene Spule	40
8.5.4. Stromdurchflossener Draht, Ohm'sches Gesetz	40
9. Maxwell-Gleichungen und Lorentz-Kraft	42
10. Energie- und Impulssatz	44
10.1. Energiesatz	44
10.2. Impulssatz	45
11. Skalar- und Vektorpotential in der Elektrodynamik	48
11.1. Definition	48
11.2. Coulomb-Eichung	49
11.3. Lorenz-Eichung	50
11.4. Lösung der Potentialgleichungen, Retardierte Potentiale	50
12. Strahlungstheorie	52
12.1. Liénard-Wiechert-Potentiale	52
12.2. Beispiel: Ruhende Punktladung	54
12.3. Beispiel: gleichförmig bewegte Punktladung	54
12.4. Strahlungsleistung	54
12.5. Dipolstrahlung	57
12.6. Beispiel: Kreisförmig bewegte Ladung	59
13. Elektro- und Magnetodynamik in Materie	61
13.1. Feldgleichungen	61
13.2. Materialgleichungen	63
13.3. Stetigkeitsbedingungen	63
13.4. Beispiel: Dielektrische Kugel im homogenen elektrischen Feld	64
14. Elektromagnetische Wellen	67
14.1. Wellengleichung in nicht-leitenden Medien	67
14.2. Lösung der Wellengleichung in nicht-leitenden Medien	68
14.2.1. Ebene Wellen	68
14.2.2. Reflexion und Brechung	69
14.2.3. Weitere Einfache Wellentypen	71
14.2.4. Helmholtz-Gleichung	71
14.2.5. Wellenpakete	72
14.3. Lösung der Wellengleichung in leitenden Medien	73
III. Spezielle Relativitätstheorie	76
15. Einführung und Relativistische Mechanik	77
15.1. Postulate und Minkowski-Raum	77
15.2. Lorentz-Transformation	79
15.3. Minkowski-Diagramme	81
15.4. Einfache Folgerungen aus der Lorentz-Trafo	83
15.4.1. Geschwindigkeitsaddition	84
15.4.2. Zeitdilatation	84
15.4.3. Längenkontraktion	85

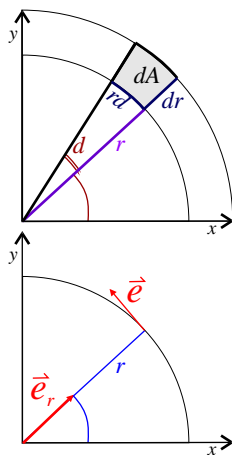
16. Lorentzkovariante Formulierung der relativistischen Mechanik	87
16.1. Beispiel: Massendefekt	89
16.2. Beispiel: Compton-Effekt	90
17. Lagrange-Formulierung der relativistischen Mechanik	92
17.1. Beispiel: Freies, relativistisches Teilchen	92
18. Lorentzkovariante Formulierung der Elektrodynamik	93
18.1. Die Maxwell-Gleichungen	93
18.2. Lorentz-Transformation des EM-Feldes	95
18.3. Lorentz-Kraft	96
18.4. Energie- und Impulserhaltung	96
18.5. Beispiel: Gleichförmig bewegte Ladung	97
19. Lagrange-Formulierung der Elektrodynamik	99
19.1. Lagrange- und Hamilton-Funktion eines geladenen Teilchens	99
19.2. Lagrange-Dichte des EM-Feldes	100
19.2.1. Einführung in die klassische Feldtheorie	100
19.2.2. Lagrange-Dichte des EM-Feldes	101
19.2.3. Eichinvarianz	102
19.2.4. Hamilton-Formalismus	102
19.3. Hypothetische Photonenmasse	103
19.4. Abschließende Bemerkungen zur Feldtheorie	103
IV. Anhang	105
A. Weblinks	106
A.1. Grundlagen	106
Literaturverzeichnis	107

Teil I.

Mathematische Grundlagen

1. Koordinatensysteme

1.1. Polarkoordinaten



$$x = r \cdot \cos \varphi$$

$$y = r \cdot \sin \varphi$$

$$\vec{e}_r = (\cos \phi, \sin \phi)$$

$$\vec{e}_\phi = (-\sin \phi, \cos \phi)$$

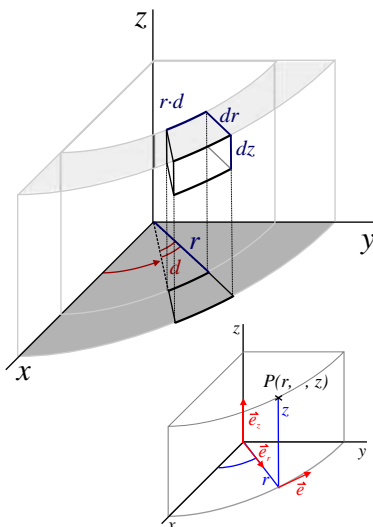
$$dA = r \cdot dr \, d\varphi$$

$$d\vec{s} = (dr, r \, d\varphi)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varphi = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} + \pi & x < 0, \\ \arctan \frac{y}{x} & x > 0, \\ \frac{\pi}{2} & x = 0 \wedge y > 0, \\ -\frac{\pi}{2} & x = 0 \wedge y < 0, \\ \text{unbestimmt} \uparrow & x = y = 0. \end{cases}$$

1.2. Zylinderkoordinaten



$$x = r \cdot \cos \phi$$

$$y = r \cdot \sin \phi$$

$$z = z$$

$$\vec{e}_r = (\cos \phi, \sin \phi, 0)$$

$$\vec{e}_\phi = (-\sin \phi, \cos \phi, 0)$$

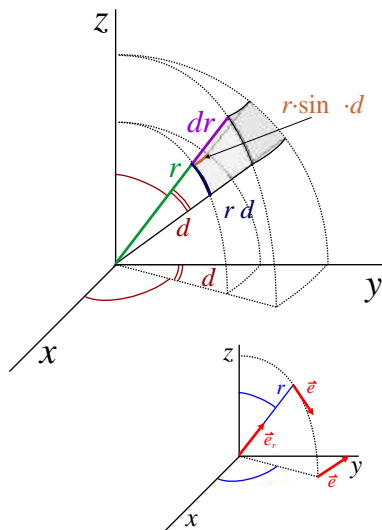
$$\vec{e}_z = (0, 0, 1)$$

$$dV = r \cdot dr \, d\phi \, dz$$

$$d\vec{A} = \vec{e}_r \cdot (r \cdot d\phi \, dz)$$

$$d\vec{s} = (dr, r \, d\phi, dz)$$

1.3. Kugelkoordinaten



$$x = r \cdot \sin \theta \cdot \cos \phi$$

$$y = r \cdot \sin \theta \cdot \sin \phi$$

$$z = r \cdot \cos \theta$$

$$\vec{e}_r = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$$

$$\vec{e}_\theta = (\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, -\sin \theta)$$

$$\vec{e}_\phi = (-\sin \phi, \cos \phi, 0)$$

$$d\Omega = \sin \theta \, d\theta \, d\phi$$

$$dV = r^2 \sin \theta \cdot dr \, d\theta \, d\phi$$

$$d\vec{A} = \vec{e}_r \cdot (r^2 \sin \theta \cdot d\theta \, d\phi)$$

$$d\vec{s} = (dr, r \cdot d\theta, r \cdot \sin \theta \cdot d\phi)$$

1.4. Zusammenhang zwischen den Koordinaten

Hier ist $\Theta(x)$ die Heavyside'sche Sprungfunktion und $\text{sgn}(x)$ die Vorzeichenfunktion.

	kart. Koordinaten (x, y, z)	Zylinderkoord. (r, ϕ, z)	Kugelkoord. (r, θ, ϕ)
x	$= x$	$= r \cdot \cos \phi$	$= r \sin \theta \cos \phi$
y	$= y$	$= r \cdot \sin \phi$	$= r \sin \theta \sin \phi$
z	$= z$	$= z$	$= r \cos \theta$
r	$= \sqrt{x^2 + y^2}$	$= r$	$= r \sin \theta$
ϕ	$= \arctan \frac{y}{x} + \pi \Theta(-x) \text{sgn}(y)$	$= \phi$	$= \phi$
z	$= z$	$= z$	$= r \cos \theta$
r	$= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$	$= \sqrt{r^2 + z^2}$	$= r$
ϕ	$= \arctan \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} + \pi \Theta(-x) \text{sgn}(y)$	$= \arctan \frac{r}{z}$	$= \theta$
θ	$= \arctan \frac{y}{x}$	$= \phi$	$= \phi$

1.5. allg. Koordinatentransformation

3-dimensionale Grundaufgabe: Man löse das Volumenintegral

$$\int_V f \cdot dV = \iiint_V f(u, v, w) \cdot du \, dv \, dw$$

unter der Koordinatentransformation $(u, v, w) \rightarrow (r, s, t)$ mit:

$$u = u(r, s, t), \quad v = v(r, s, t), \quad w = w(r, s, t)$$

So ist:

$$\iiint_V f(u, v, w) \cdot du \, dv \, dw = \iiint_{V'} f(r, s, t) \cdot |J| \cdot dr \, ds \, dt$$

$$dV' = |J| \cdot dV$$

Mit der Jacobi-Matrix:

$$J = \frac{\partial(u, v, w)}{\partial(r, s, t)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} & \frac{\partial u}{\partial s} & \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial v}{\partial r} & \frac{\partial v}{\partial s} & \frac{\partial v}{\partial t} \\ \frac{\partial w}{\partial r} & \frac{\partial w}{\partial s} & \frac{\partial w}{\partial t} \end{pmatrix}$$

2. Spezielle Funktionen

2.1. gewöhnliche LEGENDRE'sche Polynome

Definition Die LEGENDRE'sche Differentialgleichung für die Funktion $y \equiv y(x)$ hat mit $n \in \mathbb{N}_0$ die Form:

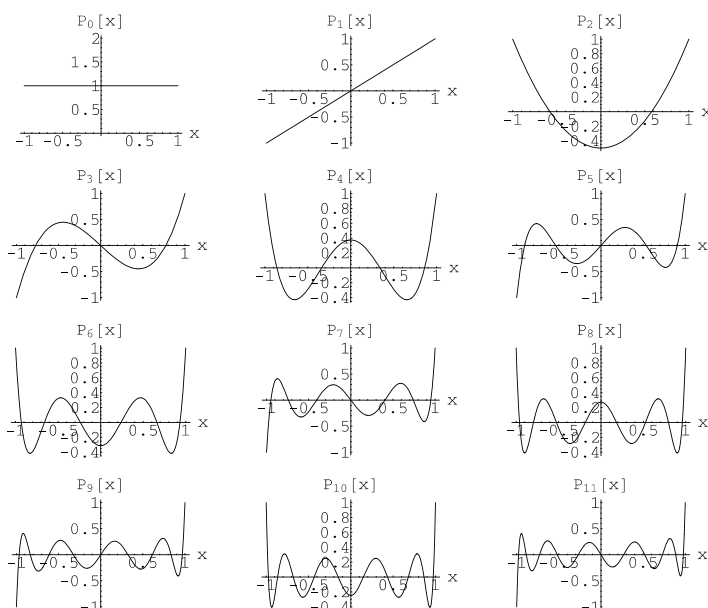
$$\frac{d}{dx} \left((1-x^2) \cdot \frac{dy(x)}{dx} \right) + n(n+1) \cdot y(x) = 0$$

Die LEGENDRE'sche Polynome bzw. Kugelfunktionen 1. Art sind partikuläre Lösungen dieser DGL. Nach der Formel von RODRIGUEZ lassen sie sich berechnen zu:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n}$$

Die ersten 11 LEGENDRE-Polynome $P_n(x)$ sind:

n	$P_n(x)$
0	1
1	x
2	$\frac{1}{2}(3x^2 - 1)$
3	$\frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$
4	$\frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$
5	$\frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$
6	$\frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5)$
7	$\frac{1}{16}(429x^7 - 693x^5 + 315x^3 - 35x)$
8	$\frac{1}{128}(35 - 1260x^2 + 6930x^4 - 12012x^6 + 6435x^8)$
9	$\frac{1}{128}(315x + 11x^3(-420 + 13x^2(126 - 180x^2 + 85x^4)))$
10	$\frac{1}{256}(-63 + 11x^2(315 + 13x^2(-210 + 630x^2 - 765x^4 + 323x^6)))$



Eigenschaften Die LEGENDRE-Polynome $P_n(x)$ haben folgende Eigenschaften:

- *Symmetrie:* $P_n(-x) = (-1)^n \cdot P_n(x)$
- *Normierung:* $P_n(1) = 1$
- Sie bilden ein *orthogonales Funktionensystem* mit der Orthogonalitätsrelation:

$$\int_{-1}^1 P_n(x) \cdot P_m(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{für } m \neq n \\ \frac{2}{2n+1} & \text{für } m = n \end{cases}$$

- *Nullstellensatz:*
Alle n Nullstellen von $P_n(x)$ sind reell und einfach und liegen im Intervall $(-1, 1)$.
- *Rekursionsformeln:*

$$\begin{aligned} (n+1) \cdot P_{n+1}(x) &= (2n+1)x \cdot P_n(x) - n \cdot P_{n-1}(x) \\ (x^2-1) \cdot \frac{dP_n(x)}{dx} &= n \cdot [xP_n(x) - P_{n-1}(x)] \end{aligned}$$

Ableitung und Integral

$$\frac{d}{dx} P_l(x) = -\frac{l \cdot x \cdot P_l(x) - l \cdot P_{l-1}(x)}{x^2 - 1} \quad \int P_l(x) dx = \frac{P_{l+1}(x) - P_{l-1}(x)}{2l+1}$$

Entwicklung nach LEGENDRE-Polynomen Da die LEGENDRE-Polynome $P_n(x)$ ein orthogonales Funktionensystem bilden, kann man quadratintegrable Funktionen $f(\xi)$ auf $-1 \leq \xi \leq 1$ nach ihnen entwickeln. Die zu $P_n(x)$ gehörenden normierten Funktionen $U_n(x)$ sind:

$$U_n(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \cdot P_n(x)$$

Damit ergibt sich die Reihenentwicklung:

$$f(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(\xi) \quad \text{mit: } a_n := \frac{2n+1}{2} \cdot \int_{-1}^1 P_n(x) \cdot f(x) dx$$

2.2. zugeordnete LEGENDRE'sche Funktionen

Definition Die zugeordnete LEGENDRE'sche Differentialgleichung für die Funktion $y \equiv y(x)$ hat mit $l \in \mathbb{N}_0$ und $m \in \mathbb{Z}$ die Form:

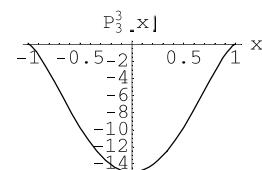
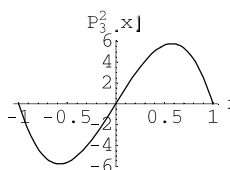
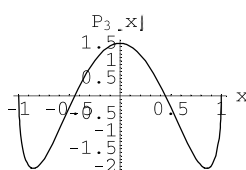
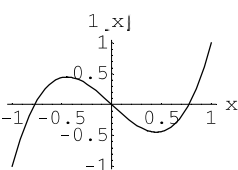
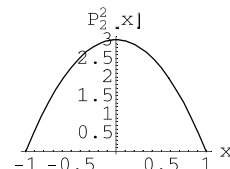
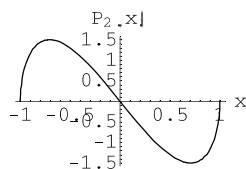
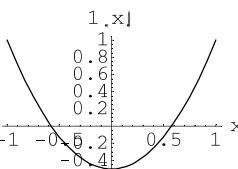
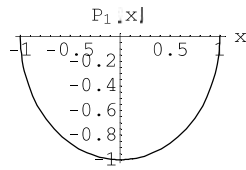
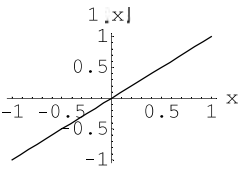
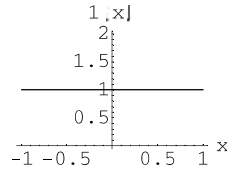
$$\frac{d}{dx} \left((1-x^2) \cdot \frac{dy(x)}{dx} \right) + \left(n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right) \cdot y(x) = 0$$

Die **zugeordneten LEGENDRE-Polynome** $P_l^m(x)$ sind partikuläre Lösungen dieser DGL. Sie ergeben sich zu:

$$P_l^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \cdot \frac{d^m P_l(x)}{dx^m}$$

Die ersten $P_l^m(x)$ sind:

	$m = 0$	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$
$l = 0$	1			
$l = 1$	z	$(x-1)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$		
$l = 2$	$\frac{1}{2}(3x^2 - 1)$	$3(x^2 - x)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$	$-3x^2 + 3$	
$l = 3$	$\frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$	$\frac{3}{2}(5x^3 - 5x^2 - z + 1)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$	$-15(x^3 - x)$	$-15(z+1)(z-1)^2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$



Eigenschaften

- $P_l^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(x)$
- Orthogonalitätsrelation:

$$\int_{-1}^1 P_l^m(x) P_l^m(x) dx = \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_{ll}$$

2.3. Kugelflächenfunktionen

Die Kugelflächenfunktionen $Y_l^m(\theta, \phi)$ sind definiert als:

$$Y_l^m(\theta, \phi) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2l+1}{2} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} \cdot P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi}.$$

Dabei sind P_l^m die zugeordneten Legendre-Polynome. Die ersten Kugelflächenfunktionen sind:

$$\begin{aligned} Y_0^0(\theta, \phi) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \\ Y_1^0(\theta, \phi) &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta, & Y_1^1(\theta, \phi) &= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\phi} \\ Y_2^0(\theta, \phi) &= \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1), \\ Y_2^1(\theta, \phi) &= -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{i\phi}, & Y_2^2(\theta, \phi) &= \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \theta e^{2i\phi} \end{aligned}$$

Eigenschaften:

- *Orthogonalitätsrelation:*

$$\int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} Y_l^{m'*}(\theta, \phi) \cdot Y_l^m(\theta, \phi) \sin \theta \, d\theta d\phi = \delta_{l'l} \delta_{m'm}$$

- *Parität:* $\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$ hat in Kugelkoordinaten folgende Gestalt: $(r, \theta, \phi) \rightarrow (-r, \pi - \theta, \pi + \phi)$. Unter dieser Transformation verhalten sich die Kugelflächenfunktionen wie folgt:

$$Y_l^m(\pi - \theta, \pi + \phi) = (-1)^l \cdot Y_l^m(\theta, \phi)$$

- *Komplexe Konjugation:*

$$[Y_l^m(\theta, \phi)]^* = (-1)^m \cdot Y_l^{-m}(\theta, \phi)$$

Entwicklung in Kugelflächenfunktionen: Die Kugelflächenfunktionen bilden eine vollständige Basis des Raumes der Funktionen $f(\theta, \phi)$, im Sinne der Kugelkoordinaten. Damit können alle $f(\theta, \phi)$ nach den $Y_l^m(\theta, \phi)$ entwickelt werden:

$$f(\theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} c_{l,m} Y_l^m(\theta, \phi), \quad \text{mit} \quad c_{l,m} = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} Y_l^{m*}(\theta, \phi) \cdot f(\theta, \phi) \sin \theta \, d\theta d\phi$$

3. Differentialoperatoren

Im folgenden wird der sog. **Nabla-Operator** verwendet. Er ist definiert als $\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix}$.

Im folgenden sei $\mathbb{R}^3 \ni \vec{u} \equiv \vec{u}(\vec{x})$ eine vektorwertige und $\mathbb{R} \ni \varphi \equiv f(\vec{x})$ eine skalare Funktion. Beide seien ein- bzw. zweimal stetig differenzierbar. Die von $\vec{\nabla}$ abgeleiteten Vektoroperatoren haben folgende Gestalt:

3.1. Karthesische Koordinaten $\vec{u} = (x, y, z)$

- **Gradient:**

$$\text{grad } \varphi = \vec{\nabla} \varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \quad (3.1.1)$$

- **Divergenz:**

$$\text{div } \vec{u} = \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (3.1.2)$$

- **Rotation:**

$$\text{rot } \vec{u} = \vec{\nabla} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u_x & u_y & u_z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (3.1.3)$$

- **Laplace:**

$$\Delta \varphi = \text{div}(\text{grad } \varphi) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \varphi) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \quad (3.1.4)$$

3.2. Zylinder-Koordinaten $\vec{u} = (r, \phi, z)$

- **Gradient:**

$$\text{grad } \varphi = \vec{\nabla} \varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \phi}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \quad (3.2.1)$$

- **Divergenz:**

$$\text{div } \vec{u} = \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \frac{1}{r} \frac{\partial (r \cdot u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (3.2.2)$$

- **Rotation:**

$$\text{rot } \vec{u} = \vec{\nabla} \times \vec{u} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \phi} - \frac{\partial u_\phi}{\partial z}, \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial (r \cdot u_\phi)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} \right) \quad (3.2.3)$$

- **Laplace:**

$$\Delta \varphi = \text{div}(\text{grad } \varphi) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \quad (3.2.4)$$

3.3. Kugel-Koordinaten $\vec{u} = (r, \theta, \phi)$

- **Gradient:**

$$\text{grad } \varphi = \vec{\nabla} \varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}, \frac{1}{r \cdot \sin \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} \right) \quad (3.3.1)$$

- **Divergenz:**

$$\text{div } \vec{u} = \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 \cdot u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \cdot \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta \cdot u_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \cdot \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \quad (3.3.2)$$

- **Rotation:**

$$\text{rot}_r \vec{u} = \frac{1}{r \cdot \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta \cdot u_\phi)}{\partial \theta} - \frac{1}{r \cdot \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} \quad (3.3.3)$$

$$\text{rot}_\theta \vec{u} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} - \frac{1}{r} \frac{\partial(r \cdot u_\phi)}{\partial r} \quad (3.3.4)$$

$$\text{rot}_\phi \vec{u} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r \cdot u_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \quad (3.3.5)$$

- **Laplace:**

$$\Delta \varphi = \text{div}(\text{grad } \varphi) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \cdot \sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left(\sin \theta \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \cdot \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2} \quad (3.3.6)$$

3.4. Sätze und Rechenregeln für den $\vec{\nabla}$ -Operator

Satz 3.1 (Rechenregeln für den $\vec{\nabla}$ -Operator) Im folgenden seien $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ vektorwertige Funktionen $\vec{f}(\vec{x})$ und $\psi = \psi(\vec{x})$ eine skalare Funktion. Sie seien jeweils ein- bzw. zweimal stetig differenzierbar. Es gelten folgende Zusammenhänge:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \psi = \text{rot}(\text{grad } \psi) = 0 \quad (3.4.1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{a}) = \text{div}(\text{rot } \vec{a}) = 0 \quad (3.4.2)$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{a}) = \text{rot}(\text{rot } \vec{a}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) - \Delta \vec{a} \quad (3.4.3)$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\psi \vec{a}) = \text{div}(\psi \vec{a}) = \vec{a} \cdot (\vec{\nabla} \psi) + \psi(\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) \quad (3.4.4)$$

$$\vec{\nabla} \times (\psi \vec{a}) = \text{rot}(\psi \vec{a}) = \vec{\nabla} \psi \times \vec{a} + \psi \vec{\nabla} \times \vec{a} \quad (3.4.5)$$

$$\vec{\nabla}(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \text{grad}(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\vec{a} \cdot \vec{\nabla}) \vec{b} + (\vec{b} \cdot \vec{\nabla}) \vec{a} + \vec{a} \times (\vec{\nabla} \times \vec{b}) + \vec{b} \times (\vec{\nabla} \times \vec{a}) \quad (3.4.6)$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \text{div}(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{a}) - \vec{a} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{b}) \quad (3.4.7)$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \text{rot}(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a}(\vec{\nabla} \cdot \vec{b}) - \vec{b}(\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) + (\vec{b} \cdot \vec{\nabla}) \vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{\nabla}) \vec{b} \quad (3.4.8)$$

Satz 3.2 (Rechenregeln für den $\vec{\nabla}$ -Operator und radialsymmetrische Funktionen) Betrachtet man radialsymmetrische Funktionen $f(r)$ mit $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ und $\vec{r} = (x, y, z)$, so ergeben sich folgende weiteren Regeln:

$$\vec{\nabla} f(r) = \text{grad}(f(r)) = \frac{df(r)}{dr} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \quad (3.4.9)$$

$$\vec{\nabla} \frac{1}{r} = \text{grad} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{\vec{r}}{r^2} \quad (3.4.10)$$

$$\Delta \frac{1}{r} = -4\pi \cdot \delta^{(3)}(\vec{r}) \quad (3.4.11)$$

4. Integralsätze

Im folgenden sei $\vec{u} \equiv \vec{u}(\vec{x})$ eine stetig diff'bare vektorwertige Funktion. Es seien ϕ, ψ stetig diff'bare skalare Funktionen $f(\vec{x})$. V beschreibt ein dreidimensionales Volumen mit dem Volumenelement $dV \equiv d^3x$. $S = \partial V$ sei seine zweidimensionale Geschlossene Oberfläche mit dem Flächenelement dA und dem äußeren Normalenvektor \vec{n} , mit $|\vec{n}| = 1$ und $d\vec{A} = \vec{n} dA$. Es gelten folgende Sätze und Formeln:

Satz 4.1 (Gauß'scher Satz)

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{u} dV = \int_V \operatorname{div} \vec{u} dV = \int_S \vec{u} \cdot d\vec{A} \quad (4.0.1)$$

Satz 4.2 ()

$$\int_V \vec{\nabla} \psi dV = \int_V \operatorname{grad} \psi dV = \int_S \psi \cdot d\vec{A} \quad (4.0.2)$$

Satz 4.3 ()

$$\int_V \vec{\nabla} \times \vec{u} dV = \int_V \operatorname{rot} \vec{u} dV = \int_S \vec{n} \times \vec{u} dA \quad (4.0.3)$$

Satz 4.4 (Erste Green'sche Identität)

$$\int_V \left(\phi \Delta \psi + (\vec{\nabla} \phi) \cdot (\vec{\nabla} \psi) \right) dV = \int_S \phi \vec{n} \cdot \vec{\nabla} \psi dA \quad (4.0.4)$$

Satz 4.5 (Zweite Green'sche Identität)

$$\int_V (\phi \Delta \psi + \psi \Delta \phi) dV = \int_S (\phi \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \phi) \cdot d\vec{A} \quad (4.0.5)$$

Im folgenden sei S eine offene Fläche mit dem Rand $C = \partial S$ und dem Linienelement $d\vec{s}$. Die Richtung der Flächennormale von S ist durch die Orientierung von C und die Rechte-Hand-Regel festgelegt. Es gilt:

Satz 4.6 (Stokes'scher Satz)

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{u}) \cdot d\vec{A} = \int_S \operatorname{rot} \vec{u} \cdot d\vec{A} = \oint_C \vec{u} \cdot d\vec{s} \quad (4.0.6)$$

Satz 4.7 ()

$$\int_S \vec{n} \times (\vec{\nabla} \psi) dA = \int_S \vec{n} \times \operatorname{grad} \psi dA = \oint_C \psi d\vec{s} \quad (4.0.7)$$

5. Sätze aus der Vektorfeldtheorie

Satz 5.1 (Zerlegungssatz) Sei $\vec{a}(\vec{r})$ ein im gesamten \mathbb{R}^3 definiertes Vektorfeld, das (ebenso wie seine Ableitungen) im unendlichen hinreichend schnell gegen 0 strebt (physikalisch sinnvolles Feld!). Dann lässt sich $\vec{a}(\vec{r})$ als Summe eines rotations- und eines divergenzfreien Anteils darstellen:

$$\vec{a}(\vec{r}) = \vec{a}_l(\vec{r}) + \vec{a}_t(\vec{r}) \quad \text{mit} \quad \text{rot } \vec{a}_l = 0; \quad \text{div } \vec{a}_t = 0 \quad (5.0.1)$$

Die Anteile \vec{a}_l und \vec{a}_t werden über Rotation und Divergenz definiert ($\text{rot grad } \varphi = 0$ und $\text{div rot } \vec{\beta} = 0$):

$$\vec{a}_l(\vec{r}) = \text{grad } \alpha(\vec{r}) \quad \vec{a}_t(\vec{r}) = \text{rot } \vec{\beta}(\vec{r}) \quad (5.0.2)$$

$$\alpha(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\text{div } \vec{a}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r' \quad \vec{\beta}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\text{rot } \vec{a}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r' \quad (5.0.3)$$

In der Zerlegung ist $\vec{a}_l(\vec{r})$ der longitudinale und $\vec{a}_t(\vec{r})$ der transversale Anteil des Feldes.

Satz 5.2 (Eindeutigkeitssatz) Ein Vektorfeld $\vec{a}(\vec{r})$ ist eindeutig festgelegt, wenn für alle Punkt $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ im Raum $\text{div } \vec{a}(\vec{r})$ (Quellen) und $\text{rot } \vec{a}(\vec{r})$ (Wirbel) bekannt sind.

Korollar 5.1 (Schlussfolgerungen aus Zerlegungs- und Eindeutigkeitssatz)

1. Jeder wirbelfreie Feld $\vec{a}(\vec{r})$ mit $\text{rot } \vec{a} = 0$ lässt sich als Gradientenfeld einer skalaren Funktion darstellen:

$$\vec{a}(\vec{r}) = \text{grad } \alpha(\vec{r})$$

2. Jedes quellenfreie Feld $\vec{a}(\vec{r})$ mit $\text{div } \vec{a} = 0$ lässt sich als Rotationsfeld darstellen:

$$\vec{a}(\vec{r}) = \text{rot } \vec{\beta}(\vec{r})$$

3. Ein allgemeines Feld ist immer eine Überlagerung von Rotations- und Wirbelfeld.

4. Das **skalare Potential** α kann aus den Quellen bestimmt werden:

$$\nabla^2 \alpha = \Delta \alpha = \text{div } \vec{a}(\vec{r})$$

Diese Formel folgt direkt durch Divergenzbildung aus Punkt 1.

5. Das **Vektor-Potential** $\vec{\beta}$ kann aus den Wirbeln bestimmt werden:

$$\Delta \vec{\beta} = -\text{rot } \vec{a}(\vec{r})$$

Diese Formel folgt direkt durch Divergenzbildung aus Punkt 1.

6. Inhomogene Wellengleichungen

In diesem Abschnitt sollen die Lösungen $g(\vec{r}, t)$ der inhomogenen Wellengleichung bei gegebener Inhomogenität $f(\vec{r}, t)$ ermittelt werden. Die Wellengleichung ist eine partielle Differentialgleichung 2. Ordnung:

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) g(\vec{r}, t) = -4\pi f(\vec{r}, t) \quad (6.0.1)$$

6.1. Homogene Wellengleichung

Dazu betrachtet man zunächst die Lösung der homogenen Gleichung

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) g_{\text{hom}}(\vec{r}, t) = 0 \quad (6.1.1)$$

Die komplexe Exponentialfunktion $e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}$ ist eine spezielle Lösung dieser Gleichung, was man durch Einsetzen leicht zeigen kann. Dies motiviert den Ansatz die allgemeine Lösung $g_{\text{hom}}(\vec{r}, t)$ als Fourier-Integral darzustellen:

$$g_{\text{hom}}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi^4}} \int d^3k \int d\omega e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)} \tilde{g}_{\text{hom}}(\vec{k}, \omega) \quad (6.1.2)$$

Setzt man diesen Ausdruck in (6.1.1) ein, so bleibt:

$$\left(\vec{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \tilde{g}_{\text{hom}}(\vec{k}, \omega) = 0 \quad (6.1.3)$$

Um diese Gleichung zu erfüllen, muss $\tilde{g}_{\text{hom}}(\vec{k}, \omega)$ überall 0 sein, außer bei $\vec{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$, also $|\vec{k}| = \pm \frac{\omega}{c}$. Man kann dann diese Funktion mit Hilfe der δ -Funktion so darstellen:

$$\tilde{g}_{\text{hom}}(\vec{k}, \omega) = \tilde{g}_1(\vec{k})\delta(\omega - c|\vec{k}|) + \tilde{g}_2(\vec{k})\delta(\omega + c|\vec{k}|) \quad (6.1.4)$$

Dabei sind $\tilde{g}_{1/2}(\vec{k})$ noch zu bestimmende Funktionen. Man kann dann die allgemeine Lösung der homogenen Wellengleichung so angeben:

Korollar 6.1 (Allgemeine Lösung der homogenen Wellengleichung) Die homogene Wellengleichung (6.1.1) hat die folgende allgemeine Lösung:

$$g_{\text{hom}}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi^4}} \int d^3k \int d\omega \left(\tilde{g}_1(\vec{k})e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega(\vec{k})t)} + \tilde{g}_2(\vec{k})e^{i(\vec{k}\vec{r}+\omega(\vec{k})t)} \right) \quad (6.1.5)$$

Dabei ist

$$\omega(\vec{k}) = c|\vec{k}|$$

Ist man nur am Realteil dieser Lösung interessiert (wie es in der Physik oft der Fall ist), so reduziert sich (6.1.5) auf:

$$\text{Re} \{ g_{\text{hom}}(\vec{r}, t) \} = \int d^3k \int d\omega \tilde{g}(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega(\vec{k})t)} \quad (6.1.6)$$

Mit einer komplexwertigen Funktion $\tilde{g}(\vec{k})$. Die Funktion $\tilde{g}(\vec{k})$ ist also gerade die Fourier-Transformierte von $\text{Re} \{ g_{\text{hom}}(\vec{r}, t) \}$.

6.2. Inhomogene Wellengleichung

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung (6.0.1)

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) g(\vec{r}, t) = -4\pi f(\vec{r}, t)$$

setzt sich aus der allgemeinen Lösung der homogenen Wellengleichung plus einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung zusammen. Im folgenden soll eine inhomogene Lösung abgeleitet werden. Die inhomogene Wellengleichung lässt sich (als Poisson-Gleichung) ganz allgemein mit der Green-Funktion $G(\vec{r}, t, \vec{r}', t')$ lösen. Es gilt dann:

$$g(\vec{r}, t) = \int d^3r' \int dt' G(\vec{r}, t, \vec{r}', t') f(\vec{r}', t'), \quad (6.2.1)$$

wobei die Green-Funktion $G(\vec{r}, t, \vec{r}', t')$ folgenden Zusammenhang erfüllen muss:

$$\left(\vec{\nabla}^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) G(\vec{r}, t, \vec{r}', t') = -4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}') \cdot \delta(t - t') \quad (6.2.2)$$

Um eine Lösung von (6.2.2) zu finden betrachtet man wieder die Fourier-transformierten der Funktionen (und damit der Gleichung):

$$G(\vec{r}, t, \vec{r}', t') = \int d^3k \int d\omega \tilde{G}(\vec{k}, \omega) e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}')} e^{i\omega(t-t')} \quad (6.2.3)$$

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}') \cdot \delta(t - t') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3k \int d\omega e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}')} e^{i\omega(t-t')} \quad (6.2.4)$$

Man erhält durch Einsetzen für (6.2.2):

$$\left(-\vec{k}^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right) \tilde{G}(\vec{k}, \omega) = -\frac{1}{4\pi^3} \quad (6.2.5)$$

$$\Rightarrow \tilde{G}(\vec{k}, \omega) = \frac{1}{4\pi^3} \frac{1}{\vec{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} = \frac{1}{8\pi^3} \frac{c}{k} \left(\frac{1}{\omega + ck} - \frac{1}{\omega - ck} \right) \quad (6.2.6)$$

$$\Rightarrow G(\vec{r}, t, \vec{r}', t') = \frac{c}{8\pi^3} \int d^3k \int d\omega \left(\frac{1}{\omega + ck} - \frac{1}{\omega - ck} \right) \cdot \frac{e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}')}}{k} e^{i\omega(t-t')} \quad (6.2.7)$$

Die Integrationen in (6.2.7) lassen sich mit Hilfe des Residuensatzes ausführen (siehe Standardliteratur). Man erhält dann endgültig:

$$\begin{aligned} G(\vec{r}, t, \vec{r}', t') &= \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \left[\delta\left((t - t') - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right) - \delta\left((t - t') + \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right) \right] = \\ &= \frac{1}{|\Delta\vec{r}|} \left[\delta\left(\Delta t - \frac{|\Delta\vec{r}|}{c}\right) - \delta\left(\Delta t + \frac{|\Delta\vec{r}|}{c}\right) \right] \end{aligned} \quad (6.2.8)$$

Daraus ergibt sich dann eine spezielle Lösung durch die Faltung mit der Inhomogenität $f(\vec{r}, t)$ (6.2.1).

Teil II.

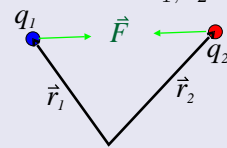
Elektrizität und Magnetismus

7. Elektrostatik

7.1. Kraftgesetz, Feld

Satz 7.1 (Coulomb-Gesetz) Die Kraft zwischen zwei Ladungen q_1, q_2 an den Punkten \vec{r}_1, \vec{r}_2 ist:

$$\vec{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2} \cdot \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \quad (7.1.1)$$



Dabei ist k eine Konstante. Im **cgs-System** gilt $k = 1$. Somit hat die Ladung q folgende Einheit:

$$[q] = 1 \frac{\sqrt{\text{cm}^3 \text{g}}}{\text{s}} = 1 \sqrt{\text{erg} \cdot \text{cm}} = 1 \text{ esE}$$

Im **MKSA-System** ist gilt:

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \quad \text{mit} \quad \epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{A s}}{\text{V m}}$$

Damit hat q die Einheit $[q] = 1 \text{ C} = 1 \text{ A} \cdot \text{s}$

Die Form $\frac{1}{r^2}$ des Kraftgesetzes hängt mit der Masselosigkeit der Photonen zusammen. Hätten die Photonen als Austauschteilchen der Kraft eine Ruhemasse $\mu \neq 0$, so ergäbe sich ein Potential vom Yukawa-Typ. Die Form (7.1.1) des Kraftgesetzes gilt streng auch nur für punktförmige Ladungen.

Satz 7.2 (Elektrisches Feld) Das elektrische Feld \vec{E} einer Punktladung q im Ursprung ist:

$$\vec{E}(\vec{r}) = k \frac{q}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \quad (7.1.2)$$

Für elektrische Felder gilt das **Superpositionsprinzip**, man erhält also das Feld von N Punktladungen aus:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i(\vec{r}) \quad (7.1.3)$$

Bei einer kontinuierlichen Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ geht dies über in:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}(\vec{r})}{q} \quad (7.1.4)$$

Schließlich berechnet sich die Kraft auf eine Probeladung q im elektrischen Feld zu:

$$\vec{F}(\vec{r}) = q \cdot \vec{E}(\vec{r}) \quad (7.1.5)$$

Satz 7.3 (Gauß'sches Gesetz) Der Fluss eines elektrischen Feldes \vec{E} durch eine geschlossene Oberfläche S (eines Volumens V) hängt nicht von der Form der Oberfläche ab, sondern nur von der in ihr enthaltenen Ladung (cgs-System):

$$\Phi_{el} = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = 4\pi Q \quad \text{mit } Q = \int_V \rho(\vec{r}) d^3r \quad (7.1.6)$$

Dabei ist Q die Gesamtladung innerhalb des Volumens V . Insbesondere ist $Q = 0$, falls V ladungsfrei ist. Mit Hilfe des Gauß'schen Integralsatzes (4.0.1) kann (7.1.6) in differentielle Form überführt werden:

$$\operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}) = 4\pi\rho(\vec{r}) \quad (7.1.7)$$

Die Quellen des elektrischen Feldes sind also die elektrischen Ladungen (Ladungsdichte ρ). Im MKSA-System gelten folgende Gleichungen:

$$\Phi_{el} = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad \operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} \quad (7.1.8)$$

7.2. Elektrisches Potential

Satz 7.4 (Elektrisches Potential) Das elektrische Feld lässt sich als Gradient eines skalaren Feldes $\varphi(\vec{r})$ darstellen. Für das Feld gilt mit einer Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$:

$$\varphi(\vec{r}) = \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' = \int_{\vec{r}}^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (7.2.1)$$

Daraus erhält man dann das elektrische Feld der Ladungsverteilung als Gradient des Feldes:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\varphi(\vec{r}) \quad (7.2.2)$$

Da nach (3.4.1) die Rotation eines beliebigen Gradienten verschwindet folgt daraus die folgende Wichtige Erkenntnis:

$$\operatorname{rot} \vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\varphi(\vec{r}) = 0 \quad (7.2.3)$$

Das elektrische Feld ist also rotations- oder wirbelfrei. Es handelt sich also um ein konservatives Kraftfeld. Damit ist die im folgenden Satz 7.6 eingeführte Arbeit sinnvoll, da wegunabhängig.

Satz 7.5 (elektrische Spannung) Eine Potentialdifferenz zwischen zwei Punkten P_1 und P_2 wird als Spannung U bezeichnet:

$$U = \varphi(P_2) - \varphi(P_1) = \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (7.2.4)$$

Satz 7.6 (elektrische Arbeit) Die Arbeit W , die an einer Ladung q verrichtet werden muss, wenn sie über einen Weg C zwischen den Punkten A und B im elektrischen Feld \vec{E} bewegt wird, ist:

$$W_{el} = -q \int_C \vec{E}(\vec{s}) \cdot d\vec{s} = -q \cdot [\varphi(B) - \varphi(A)] = -qU \quad (7.2.5)$$

Ist der Weg C geschlossen, so gilt insbesondere:

$$W_{el} = -q \oint_C \vec{E}(\vec{s}) \cdot d\vec{s} = 0 \quad (7.2.6)$$

7.3. Beispiele: elektrisches Feld und Potential

7.3.1. Felddurchgang durch eine Platte

Ein elektrisches Feld \vec{E} passiere eine Platte mit der Flächenladungsdichte $\sigma(\vec{r})$. Um das Verhalten des Feldes an der Platte zu untersuchen legt man einen Integrationsweg ΔF um einen Teil der Platte (Volumen ΔV), wie es in nebenstehender Abbildung gezeigt ist. Der Weg sei rechteckig und so beschaffen, dass der Fluss durch die Seitenteile vernachlässigbar ist. Er liegt also infinitesimal eng an der Platte. Die Normalenvektoren \vec{n} sind in der Zeichnung eingetragen. Mit ihnen gilt $d\vec{F} = \vec{n} \cdot dF$. Für die Ladung innerhalb des Weges ΔF gilt dann

$$q = \int_{\Delta F} \sigma(\vec{r}) dF.$$

Damit kann man dann das Gauß'sche Gesetz benutzen und erhält:

$$\int_{\Delta F} \vec{E} \cdot d\vec{F} = \oint_{\Delta F} \vec{E} \cdot \vec{n} dF = 4\pi q.$$

Macht man die Breite des Integrationsweges so klein, dass das el. Feld auf dieser Breite als konstant angenommen werden kann, so bezeichnet man das Feld oberhalb und unterhalb der Platte mit \vec{E}_o bzw. \vec{E}_u und erhält:

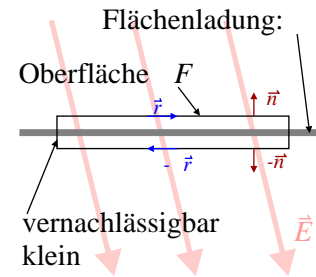
$$\begin{aligned} 4\pi q &= \oint_{\Delta F} \vec{E} \cdot \vec{n} dF = (\vec{E}_o \cdot \vec{n} - \vec{E}_u \cdot \vec{n}) \cdot \Delta F \\ \Rightarrow (\vec{E}_o - \vec{E}_u) \cdot \vec{n} &= 4\pi \frac{q}{\Delta F} = 4\pi \sigma \end{aligned}$$

Integriert man das Feld entlang der Oberfläche ΔF , so erhält man:

$$0 = \oint_{\Delta F} \vec{E} \cdot d\vec{r} = (\vec{E}_{ot} - \vec{E}_{ut}) \cdot \Delta \vec{r} \Rightarrow \vec{E}_{ot} = \vec{E}_{ut}$$

Zusammen bedeutet dies:

Die Normalkomponente eines elektrischen Feldes an einer geladenen Platte (Flächenladungsdichte σ) macht einen Sprung um $4\pi\sigma$ beim Durchgang durch die Platte. Die Tangentialkomponente ändert sich nicht.



7.3.2. Stetigkeitsbedingungen bei Leitern

In einem leitenden Körper werden sich die (frei beweglichen) Ladungsträger so ausrichten, dass das Feld innerhalb des Körpers verschwindet (Minimum der Energie!). Damit liegt im gesamten Körper ein konstantes Potential vor. Über den Gauß'schen Satz erhält man:

$$\int_F \vec{E} \cdot d\vec{A} = \vec{E}_a \cdot d\vec{A} + \vec{E}_i \cdot d\vec{A} = (\vec{E}_a - \vec{E}_i) \cdot \vec{n} dA = 4\pi \delta Q$$

Dabei ist δQ die Ladung innerhalb des Integrationsweges F . Für das elektrische Feld gilt $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$. Daraus erhält man mit dem Stokes'schen Integralsatz (4.0.6):

$$\int_F (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{A} = 0 = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{s} = \vec{E}_i \cdot d\vec{s} + \vec{E}_a \cdot d\vec{s} = (\vec{E}_a - \vec{E}_i) \cdot \vec{t} \cdot ds$$

Dabei ist F die in Abb. 7.1 eingezeichnete Integrationsfläche und $C = \partial F$ ihr Rand. Die Höhe h des Integrationsvolumens ist in beiden Fällen vernachlässigbar klein und bringt somit keinen Beitrag zu den Integralen. Setzt man noch $\vec{E}_i = 0$ ein, da das Innere des Leiters feldfrei ist, so erhält man:

$$\vec{E}_a \cdot \vec{n} = 4\pi \frac{\delta Q}{dA} = 4\pi \sigma \quad \text{und} \quad \vec{E}_a \cdot \vec{t} = 0$$

In Worten:

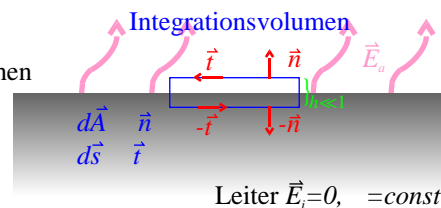


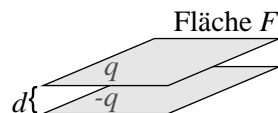
Abb. 7.1.: Zur Berechnung der Stetigkeitsbedingungen bei Leitern

Satz 7.7 (Stetigkeitsbedingungen des elektrischen Feldes bei Leitern) *Das elektrische Feld steht senkrecht auf leitenden Oberflächen, die Tangentialkomponente des Feldes verschwindet dort. Die Normalkomponente ist proportional zur Flächenladungsdichte $\sigma = \frac{dQ}{dA}$.*

Mit $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$ erhält man folgende Darstellung der Flächenladungsdichte:

$$\vec{n} \cdot (\vec{\nabla}\varphi) = \frac{\partial\varphi}{\partial n} = -4\pi\sigma \quad (7.3.1)$$

7.3.3. Plattenkondensator



Man betrachtet zwei leitende Flächen im Abstand d , die die Ladung q und $-q$ tragen. Die Aufgabe ist es die Feldstärke \vec{E} zwischen den Platten zu bestimmen. Man verwendet wieder den Gauß'schen Satz, indem man wie in Abschnitt 7.3.1 eine Oberfläche S um die obere Platte legt (Fläche F). Außerhalb des Kondensators befindet sich kein Feld. Dies kann man mit (7.1.7) begründen, da die Ladung innerhalb einer beliebig eng liegenden Fläche, die den Kondensator einschließt 0 ist. Es gilt dann:

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{F} = (\vec{E} - \vec{0}) \cdot \vec{n}F = E = 4\pi q \quad \Rightarrow \quad E = 4\pi \frac{q}{F} = 4\pi\sigma$$

Das Feld steht also senkrecht auf den Platten und ist proportional zur Ladung und invers proportional zur Fläche. Für die Spannung am Kondensator, also die Potentialdifferenz zwischen den Platten gilt:

$$U = \int_0^d \vec{E} \cdot d\vec{s} = -Ed = -4\pi q \frac{d}{F}$$

Man definiert nun die Kapazität

$$C := \frac{F}{4\pi d}$$

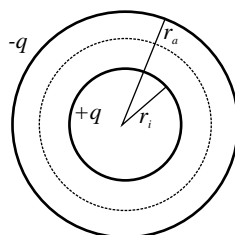
und erhält damit

$$q = C \cdot U$$

Aus dem elektrischen Feld kann man noch das Potential zwischen den Kondensatorplatten berechnen (x -Richtung steht senkrecht auf den Platten):

$$\varphi(x) = \int_x^\infty E \, ds = E \cdot \int_x^d ds = 4\pi \frac{q}{F} (d - x) \propto x$$

7.3.4. Kugelkondensator



Man betrachtet zwei ineinanderliegende Kugeln der Radien r_i (Ladung $+q$) und r_a (Ladung $-q$). Das Feld außerhalb von r_a und innerhalb von r_i ist Null (siehe letztes Beispiel). Der Integrationsweg wird nun auf eine Kugel zwischen den zwei Platten gelegt, sodass die so entstehende Oberfläche S die innere Kugel einschließt. Es gilt dann:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 E(r) = 4\pi q.$$

Zur Integration wurden Kugelkoordinaten und deren Flächenelement $d\vec{S}(r, \theta) = \vec{e}_r \cdot r^2 d\Omega$ verwendet. Der Faktor 4π kommt von der Integration über den gesamten Raum. Das Feld hat wegen $d\vec{S} \propto \vec{e}_r$ nur eine Radialkomponente. Das Feld entspricht also demjenigen einer Punktladung q im Mittelpunkt des Kondensators. Insgesamt gilt also:

$$E(r) = \frac{q}{r^2}.$$

Damit kann man wieder die Spannung ausrechnen:

$$U = \int_{r_i}^{r_a} E(r) dr = q \int_{r_i}^{r_a} \frac{1}{r^2} dr = q \cdot \left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_a} \right)$$

Und man erhält die Kapazität:

$$C = \frac{q}{U} = \frac{r_a r_i}{r_a - r_i}$$

Für das elektrische Potential erhält man dann:

$$\varphi(r) = \int_r^\infty E(r') dr' = \int_r^\infty \frac{q}{r'^2} dr' = -\frac{1}{3} \frac{q}{r^3}$$

7.3.5. Zylinderkondensator

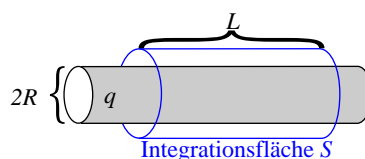
Man betrachtet nun einen zylindrischen Kondensator der Länge l . Man arbeitet nun also in Zylinderkoordinaten und erhält analog zum Vorgehen in den obigen Beispielen:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S \vec{E} \cdot \vec{e}_r r d\phi dz = E(r) r \cdot \oint_S d\phi dz = 2\pi l r \cdot E(r) = 4\pi q \quad \Rightarrow \quad E(r) = \frac{2q}{l} \cdot \frac{1}{r}$$

Daraus folgt dann Potential und Kapazität:

$$U = \int_{r_1}^{r_2} E(r) dr = \frac{2q}{l} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r} dr = \frac{2q}{l} \ln \frac{r_a}{r_i}, \quad C = \frac{h}{2 \ln(r_a/r_i)}.$$

7.3.6. geladener Stab



Man betrachtet einen homogen geladenen Stab. Der Radius des Stabes sei R und die Ladung pro Längeneinheit ist $\lambda = \rho \pi R^2$. Diese Symmetrie legt wieder Zylinderkoordinaten nahe und bewirkt so eine radiale Ausrichtung des Feldes. Zunächst wird das Feld außerhalb des Stabes mit Hilfe des Gauß'schen Satzes berechnet. Die Länge der Integrationsoberfläche ist L . Sie umschließt den Stab, wie es in der Abbildung rechts eingezeichnet

ist (blau). Die Abhängigkeit von der Länge L wird später herausfallen, wenn man die Längenladungsdichte λ verwendet.

$$\begin{aligned}\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \oint_S \vec{E} \cdot \vec{e}_r r d\phi dz = \\ &= E(r)r \cdot \oint_S d\phi dz = 2\pi Lr \cdot E(r) = 4\pi q = 4\pi\lambda \cdot L \\ &\Rightarrow E_a(r) = 2\lambda \cdot \frac{1}{r} \quad \text{für } r > R\end{aligned}$$

Im inneren des Stabes darf nur die Ladung innerhalb des Radius $r \leq R$ berücksichtigt werden, also $q' = \rho \cdot \pi r^2$.
Damit gilt dann:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 2\pi Lr \cdot E(r) = 4\pi' = 4\pi^2 \rho \cdot r^2 L \quad \Rightarrow \quad E_i(r) = \frac{2\lambda}{R^2} \cdot r \quad \text{für } r < R$$

7.3.7. Dipol



Ein Dipol bestehe aus zwei Ladungen $\pm e$, die sich im Abstand a befinden. Der Ursprung des Koordinatensystems wird auf die Hälfte der Verbindungsstrecke zwischen den Ladungen gelegt. Man betrachtet das Feld an einem beliebigen Beobachtungspunkt $P = (x, y, z)$. Die Abstände der Ladungen zu P sind \vec{r}_1 und \vec{r}_2 . Für das Feld gilt das Superpositionsprinzip und man erhält:

$$\varphi(x, y, z) = \frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2}$$

Es gilt also die Abstände r_1, r_2 umzuformen. Für r_1 erhält man mit $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ so:

$$r_1^2 = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 + z^2 = r^2 \cdot \left[1 - \frac{ax}{r^2} + \frac{a^2}{4r^2}\right]$$

Nun nimmt man den Abstand a als klein gegenüber r an (**Dipol-Näherung**), vernachlässigt den a^2 Term und erhält:

$$r_1 = r \cdot \sqrt{1 - \frac{ax}{r^2}} \approx r \cdot \left[1 - \frac{1}{2} \frac{ax}{r^2}\right]$$

Im zweiten Schritt wurde die Wurzel entwickelt ($\sqrt{1 \pm x} \approx 1 \pm \frac{x}{2}$). Analog erhält man für r_2 :

$$r_2 \approx r \cdot \left[1 + \frac{1}{2} \frac{ax}{r^2}\right]$$

Dies kann man nun in das Potential einsetzen und erhält:

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z) &= \frac{q}{r \cdot \left[1 - \frac{1}{2} \frac{ax}{r^2}\right]} - \frac{q}{r \cdot \left[1 + \frac{1}{2} \frac{ax}{r^2}\right]} = \frac{q}{r} \cdot \left\{ \frac{\left[1 + \frac{1}{2} \frac{ax}{r^2}\right]}{\left[1 + \frac{1}{2} \frac{ax}{r^2}\right] \left[1 - \frac{1}{2} \frac{ax}{r^2}\right]} - \frac{\left[1 - \frac{1}{2} \frac{ax}{r^2}\right]}{\left[1 + \frac{1}{2} \frac{ax}{r^2}\right] \left[1 - \frac{1}{2} \frac{ax}{r^2}\right]} \right\} = \\ &= \frac{q}{r} \cdot \left\{ \frac{\frac{ax}{r^2}}{1 - \frac{1}{4} \left(\frac{ax}{r^2}\right)^2} \right\} \approx \frac{q}{r} \cdot \frac{ax}{r^2} = \frac{qax}{r^3} \end{aligned}$$

Nun führt man noch das Dipolmoment ein

$$\boxed{\vec{p} := q \cdot \vec{a}} \quad (7.3.2)$$

Dabei ist \vec{a} der Verbindungsvektor zwischen den Ladungen. Das Dipolmoment zeigt von $-q$ nach q und hat den Betrag $|\vec{p}| = qa$. Damit kann man dann das Potential einfacher schreiben:

$$\boxed{\varphi(\vec{r}) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}} \quad (7.3.3)$$

Das Problem weist radiale Symmetrie auf, sodass man das Feld auch in Abhängigkeit von r und θ angeben kann (siehe Abbildung am Anfang des Abschnittes). Um die \vec{p} -Achse ist das Problem natürlich rotationssymmetrisch. Der radiale Einheitsvektor in Kugelkoordinaten lautet $\vec{e}_r = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$. Das Problem wurde hier so gedreht, dass \vec{p} parallel zur z -Achse ist. Somit passt die Beschreibung des Problems zur Standarddarstellung der Kugelkoordinaten. Da in diesem Beispiel \vec{p} nur eine z -Komponente hat, also $\vec{p} = (0, 0, qa)$ kann man das Feld auch so schreiben:

$$\boxed{\varphi(\theta, r) = \frac{P \cdot r \cdot \cos \theta}{r^3} = \frac{aq \cdot \cos \theta}{r^2}} \quad (7.3.4)$$

Mit dem $\vec{\nabla}$ -Operator in Kugelkoordinaten kann man daraus das elektrische Feld berechnen:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\vec{\nabla} \varphi = - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \cdot \sin \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} \vec{e}_\phi \right) = \\ &= \frac{2P \cos \theta}{r^3} \vec{e}_r + \frac{P \sin \theta}{r^3} \vec{e}_\theta + 0 \end{aligned}$$

Daraus erhält man zusammenfassend:

$$\vec{E} = \frac{3\vec{e}_r(\vec{p} \cdot \vec{e}_r) - \vec{p}}{r^3} \quad (7.3.5)$$

Die folgende Abb. 7.2 zeigt das Feld und Potential eines Dipols.

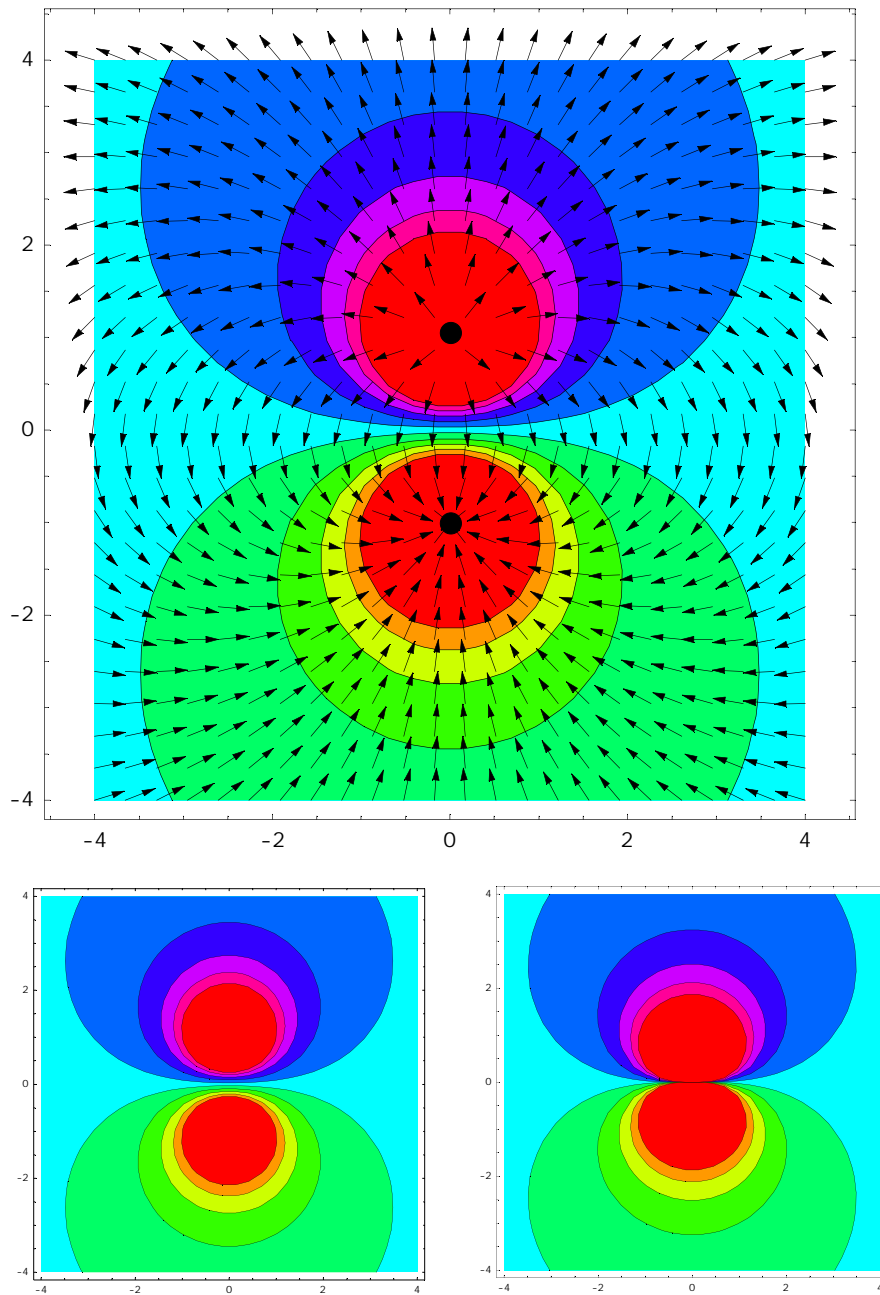


Abb. 7.2.: Feld und Potential eines Dipols: Oben und unten links sind die exakten Ergebnisse (numerische Rechnung ohne Näherungen) aufgetragen. Unten sieht man die Ergebnisse, nach Gleichung (7.3.3) (Dipolnäherung). In großem Abstand vom Ursprung stimmen beide Potentiale überein. In der Nähe des Ursprungs führt die Dipolnäherung zu Abweichungen.

Befindet sich ein elektrischer Dipol in einem elektrischen Feld \vec{E} , so wirkt auf ihn das Folgende Drehmoment:

$$\vec{D} = \vec{p} \times \vec{E}$$

und er weist die Folgende potentielle Energie aus:

$$W_{el} = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

Dies führt dazu, dass sich der Dipol immer parallel zu den Feldlinien ausrichten wird.

7.4. Green'sche Theoreme

Bisher konnte mit (7.2.1) das elektrische Potential aus einer gegebenen Ladungsverteilung ρ berechnet werden:

$$\varphi = \int \frac{\rho}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV$$

Dies entspricht im übrigen formal einer Faltung der Ladungsverteilung mit dem Potential einer Punktladung und geht für diskrete Verteilungen $\rho = \sum_{\vec{r}'} q \delta(\vec{r} - \vec{r}')$ in eine Summe über Punktladungspotentiale über (Superpositionsprinzip!). Oft sind aber andere Randbedingungen gegeben. Neben der Ladungsverteilung in einem gewissen Gebiet hat man dann noch die Potential- φ , oder Feldverteilung $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$ in dem Gebiet gegeben. Dafür sind aber die Randbedingungen, die diese Felder hervorrufen nicht bekannt. Man nutzt dann die zwei Green'schen Identitäten (4.0.4) und (4.0.5):

Satz 7.8 (Green'sche Identitäten)

$$\int_V (\phi \Delta \psi + (\vec{\nabla} \phi) \cdot (\vec{\nabla} \psi)) dV = \int_S \phi (\vec{\nabla} \psi) \cdot d\vec{A} = \int_S \phi \vec{n} \cdot (\vec{\nabla} \psi) dA \quad (7.4.1)$$

$$\int_V (\psi \Delta \phi + \phi \Delta \psi) dV = \int_S (\phi \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \phi) \cdot d\vec{A} = \int_S (\phi \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \phi) \cdot \vec{n} dA \quad (7.4.2)$$

Dabei sind $\psi(\vec{r})$ und $\phi(\vec{r})$ zwei beliebige skalare Felder.

Desweiteren kann man noch folgende Differentialgleichungen ableiten: Setzt man $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$ in das Gauß'sche Gesetz $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho$ ein, so erhält man:

Satz 7.9 (Poissonsgleichung)

$$\Delta \varphi(\vec{r}) = \vec{\nabla}^2 \varphi(\vec{r}) = -4\pi \rho(\vec{r}) \quad \text{cgs-System} \quad (7.4.3)$$

$$\Delta \varphi(\vec{r}) = \vec{\nabla}^2 \varphi(\vec{r}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} \quad \text{MKSA-System} \quad (7.4.4)$$

Im ladungsfreien Raum reduziert sich diese Gleichung auf die Laplace-Gleichung:

$$\Delta \varphi(\vec{r}) = \vec{\nabla}^2 \varphi(\vec{r}) = 0 \quad (7.4.5)$$

Für die Poissonsgleichung erhält man folgende einfache Form, wenn man nur das Potential $\varphi = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$ einer Punktladung betrachtet:

$$\vec{\nabla}^2 \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) = -4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (7.4.6)$$

Nun setzt man folgenden Spezialfall in die Green'sche Identität (7.4.2) ein:

$$\psi \equiv \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad \phi \equiv \varphi \quad \Rightarrow \quad \Delta \psi = -4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}'), \quad \Delta \phi = -4\pi \rho \quad (7.4.7)$$

Es tritt dann ein Term $\int_V \phi \Delta \psi dV$ auf, der sich mit Hilfe von (7.4.6) vereinfachen lässt:

$$\int_V \phi \Delta \psi dV = -4\pi \int_V \phi(\vec{r}) \delta(\vec{r} - \vec{r}') dV = \phi(\vec{r}') \equiv \varphi(\vec{r}')$$

Dieser Term ergibt also das Potential im Raumgebiet und man erhält insgesamt:

$$\varphi(\vec{r}) = \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' + \frac{1}{4\pi} \oint_S \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \frac{\partial \varphi(\vec{r}')}{\partial n'} - \varphi(\vec{r}') \frac{\partial}{\partial n'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] dA \quad (7.4.8)$$

Dabei ist $\frac{\partial}{\partial n'}$ die Ableitung in Normalenrichtung \vec{n} und lässt sich auch so schreiben:

$$\frac{\partial \varphi(\vec{r}')}{\partial n'} = \vec{n} \cdot (\vec{\nabla}_{\vec{r}'} \varphi(\vec{r}')).$$

Das Potential im Raumgebiet V ist also bestimmt durch die Angabe der Ladungsdichte ρ , das von außen aufgeprägte Potential $\varphi(S)$ auf dem Rand $S = \partial V$ (**Dirichlet'sche Randbedingung**) und den Ableitungen $\frac{\partial \varphi(S)}{\partial n}$ des Potentials auf S , also dem elektrischen Feld auf S (**von-Neumann Randbedingung**). Es lässt sich weiter zeigen, dass eine der letzten beiden Randbedingungen ausreicht. Bei Angabe beider Randbedingungen ist das Problem überbestimmt und u.U. gar nicht lösbar.

Formale Lösung der elektrostatischen Randwertprobleme durch Green-Funktionen: Zunächst soll (7.4.7) etwas weiter gefasst werden. Das dort eingesetzte $\varphi = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$ ist nur ein spezieller Vertreter der Klasse der sog. Green'schen Funktionen $G(\vec{r}, \vec{r}')$. Diese Funktionen haben folgende Eigenschaften:

1. Sie erfüllen alle die DGL:

$$\Delta G(\vec{r}, \vec{r}') = -4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (7.4.9)$$

2. Symmetrie: $G(\vec{r}, \vec{r}') = G(\vec{r}', \vec{r})$

3. Darstellung:

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + g(\vec{r}, \vec{r}') \quad (7.4.10)$$

wobei $g(\vec{r}, \vec{r}')$ die Laplace-Gleichung erfüllt:

$$\Delta g(\vec{r}, \vec{r}') = 0 \quad (7.4.11)$$

Damit geht aber (7.4.8), also die Lösung der DGL

$$\Delta \varphi = -4\pi \rho$$

in die folgende allgemeinere Form über:

$$\varphi(\vec{r}) = \int_V \rho(\vec{r}') G(\vec{r}, \vec{r}') dV' + \frac{1}{4\pi} \oint_S \left[G(\vec{r}, \vec{r}') \frac{\partial \varphi(\vec{r}')}{\partial n'} - \varphi(\vec{r}') \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'} \right] dA \quad (7.4.12)$$

Die Funktion g stellt anschaulich das Potential einer Ladungsverteilung außerhalb von V dar, die die Randbedingungen erfüllt (virtuelle Ladungsverteilung). Mit der Funktion g hat man nun eine zusätzliche Freiheit gewonnen, die eingesetzt werden kann, um aus (7.4.12) entweder die Dirichlet'sche oder die von-Neumann-Randbedingung zu entfernen, sodass die Lösung eindeutig wird:

- **Dirichlet'sche Randbedingung:** Hier setzt man $G(\vec{r}, \vec{r}')|_{\vec{r}' \in S} = 0$. Damit erhält man dann:

$$\varphi(\vec{r}) = \int_V \rho(\vec{r}') G(\vec{r}, \vec{r}') dV' - \frac{1}{4\pi} \oint_S \varphi(\vec{r}') \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'} dA \quad (7.4.13)$$

Dies ist eine Lösung des Problems, wenn man eine Lösung der Laplace-Gleichung mit den Randbedingungen

$$g(\vec{r}, \vec{r}') = -\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

kennt.

- **von-Neumann-Randbedingung:** Hier setzt man $\frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'}|_{\vec{r}' \in S} = -\frac{4\pi}{S}$. Damit erhält man dann:

$$\varphi(\vec{r}) = \langle \varphi \rangle_S + \int_V \rho(\vec{r}') G(\vec{r}, \vec{r}') dV' + \frac{1}{4\pi} \oint_S G(\vec{r}, \vec{r}') \frac{\partial \varphi(\vec{r}')}{\partial n'} dA \quad (7.4.14)$$

Dabei ist $\langle \varphi \rangle_S$ der Mittelwert des Feldes auf der Oberfläche S , der durch Addition einer Konstanten auch zu 0 gewählt werden kann (es können nur Potentialunterschiede gemessen werden!). Dieser Ausdruck löst das Problem, wenn man eine Lösung der Laplace-Gleichung mit den Randbedingungen:

$$\left. \frac{\partial g(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'} \right|_{\vec{r} \in S} = -\frac{4\pi}{F} - \frac{\partial}{\partial n'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

kennt.

Dieses Kalkül bringt insofern eine Vereinfachung, als die Randbedingungen jetzt nicht mehr von den speziellen Randbedingungen abhängen.

Methode der Bildladungen: In einfachen Fällen kann man oft eine Ladungsdichte außerhalb V angeben, die gerade die Randbedingungen des Problems im Volumen V erfüllt und so das Problem recht einfach lösen.

7.5. Beispiele: Green'sche Theoreme

7.5.1. Geerdete Kugel im Feld einer Punktladung

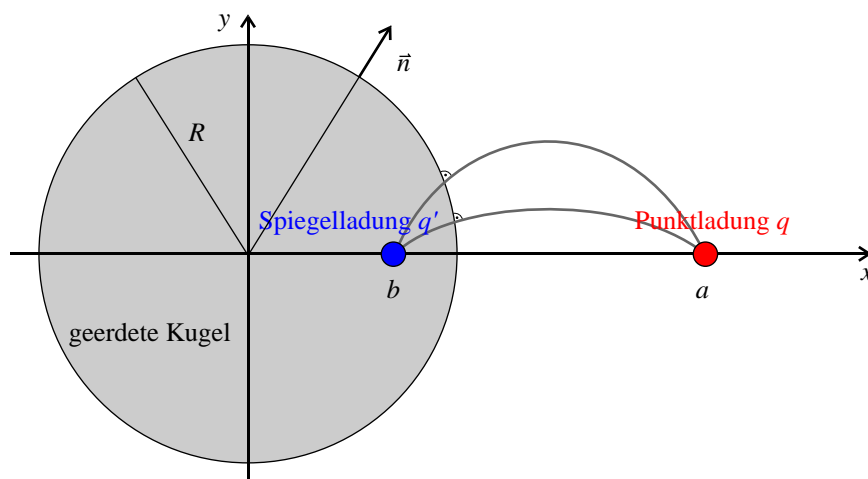


Abb. 7.3.: geerdete Metallkugel und Punktladung

Man betrachtet eine geerdete Kugel (Radius R), neben der sich eine Punktladung q im Abstand $a - R$ befindet (siehe Abb. 7.3). Da die Kugel geerdet ist, liegt sie auf Erspotential 0 ($\varphi(r) = 0 \quad \forall r \leq R$). Es stellt sich nun die Frage nach dem Potential φ außerhalb der Kugel. Der Bereich um die Kugel wird also als Volumen V bezeichnet, in dem die Laplace-Gleichung

$$\Delta \varphi(\vec{r}) = -4\pi \delta(x - a)$$

zu lösen ist. Außerdem muss die Lösung φ die Randbedingung

$$\varphi(\vec{r})|_{|\vec{r}|=R} = 0$$

erfüllen. Zur Lösung verwendet man die Methode der Spiegelladung. Man versucht also eine Ladungsverteilung innerhalb der Kugel (also außerhalb von V) zu finden, die die Randbedingung erfüllt. Die Symmetrie des Problems legt einen Ansatz nahe, bei dem man eine Punktladung q' ins Innere der Kugel legt (bei $\vec{r} = (b, 0, 0)$ mit $b < R$). Das gesamte Potential mit einer solchen Ladung ist dann:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{q}{|\vec{r} - a\vec{e}_x|} + \frac{q'}{|\vec{r} - b\vec{e}_x|}$$

Damit gilt auf dem Rand der Kugel mit der allg. Darstellung $\vec{r} = x\vec{n}$ (\vec{n} ist ein normierter Normalenvektor auf die Kugeloberfläche), dass $\vec{r} = R\vec{n}$ und damit:

$$\varphi(\vec{r})|_{|x\vec{n}|=R} = \frac{q}{|R\vec{n} - a\vec{e}_x|} + \frac{q'}{|R\vec{n} - b\vec{e}_x|} = \frac{q}{|R\vec{n} - a\vec{e}_x|} + \frac{q'}{b|\frac{R}{b}\vec{n} - \vec{e}_x|} \stackrel{!}{=} 0$$

Diese Gleichung wird durch $b = \frac{R^2}{a}$ und $q' = -\frac{Rq}{a}$ gelöst. Damit lautet das Potential außerhalb der Kugel:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{q}{|\vec{r} - a\vec{e}_x|} + \frac{-Rq}{a|\vec{r} - \frac{R^2}{a}\vec{e}_x|}$$

In Abb. 7.4 sieht man das Ergebnis:

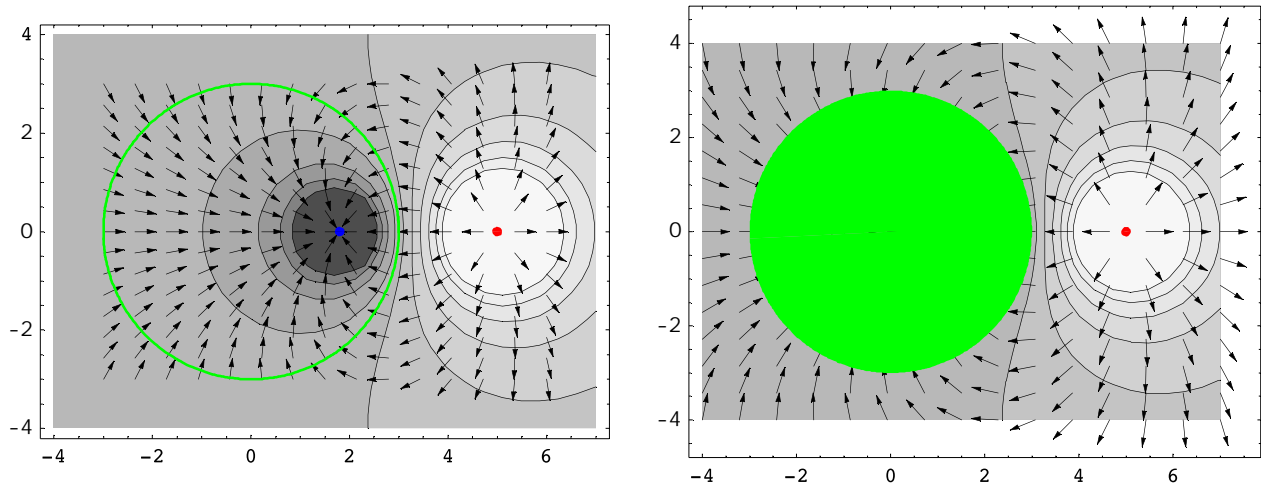


Abb. 7.4.: Punktladung gegenüber geerdeter Kugel

Entfernt man nun die Erdung und bringt zusätzlich die Ladung Q auf die Kugel, so wird sich die Ladung $Q - q' = Q + \frac{Rq}{a}$ gleichmäßig auf der Oberfläche der Kugel verteilen. Dies bedeutet aber, dass sie so wirkt, als ob sie im Zentrum der Kugel als Punktladung vorliegt. Das so erhaltene Potential hat also nur einen zusätzlichen Term der Form einer Punktladung:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{q}{|\vec{r} - a\vec{e}_x|} + \frac{-Rq}{a|\vec{r} - \frac{R^2}{a}\vec{e}_x|} + \frac{Q + \frac{Rq}{a}}{|\vec{r}|}$$

Das Aussehen dieses Potentials ist in Abb. 7.5 gezeigt. Dass sich die mit der Restladung geladene Kugel tatsächlich wie eine Punktladung verhält lässt sich etwa mit dem Gauß'schen Satz und einer Integrationsfläche um die geladene Kugel zeigen.

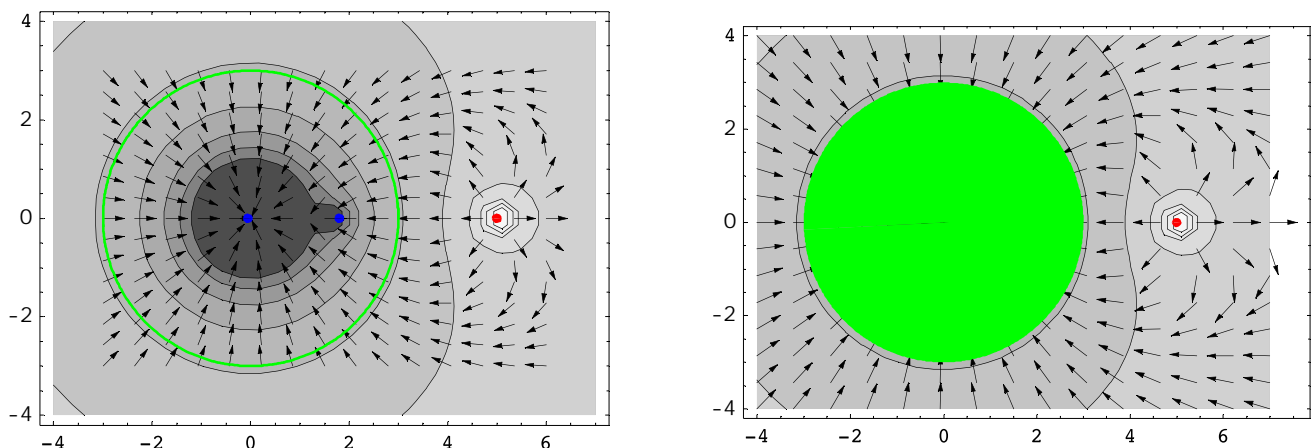


Abb. 7.5.: Punktladung gegenüber geladener Kugel

7.5.2. Lösung der Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten

Die Laplacegleichung $\Delta\Phi(\vec{r}) = 0$ hat in Kugelkoordinaten $\vec{r} = (r, \phi, \theta)$ die Form:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2(r\Phi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} = 0$$

Man macht zur Lösung den Produktansatz: $\Phi = \frac{U(r)}{r} P(\theta) Q(\phi)$ und erhält aus obiger Gleichung:

$$PQ \frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{UQ}{r^2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) + \frac{UP}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{d^2 Q}{d\phi^2} = 0$$

Man multipliziert mit $\frac{r^2 \sin^2 \theta}{UPQ}$ und erhält weiter:

$$\underbrace{r^2 \sin^2 \theta \left[\frac{1}{U} \frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{1}{Pr^2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) \right]}_{= m^2} + \underbrace{\frac{1}{Q} \frac{d^2 Q}{d\phi^2}}_{= -m^2} = 0$$

Von ϕ hängt jetzt nur noch der letzte Teil der DGL ab. Also kann man mit $m = \text{const}$ für $Q(\phi)$ die folgende DGL abspalten und erhält als Lösung:

$$\frac{1}{Q} \frac{d^2 Q}{d\phi^2} = -m^2 \quad \Rightarrow \quad Q = e^{\pm im\phi}$$

Damit Q im ganzen Winkelbereich $0 \leq \phi \leq 2\pi$ gültig ist, muss $m \in \mathbb{Z}$ gelten. Aus dem ersten Teil erhält man mit $l = \text{const}$:

$$\begin{aligned} r^2 \sin^2 \theta \left[\frac{1}{U} \cdot \frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{1}{Pr^2 \sin \theta} \cdot \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \cdot \frac{dP}{d\theta} \right) \right] &= m^2 \quad \left| \cdot \frac{1}{\sin^2 \theta} \right. \\ \underbrace{\left[\frac{r^2}{U} \cdot \frac{d^2 U}{dr^2} \right]}_{= l(l+1)} + \underbrace{\left[\frac{1}{P \sin \theta} \cdot \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \cdot \frac{dP}{d\theta} \right) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right]}_{= -l(l+1)} &= 0 \end{aligned}$$

Und damit die zwei separierten DGLs:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 U}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} \cdot U &= 0 \\ \frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \cdot \frac{dP}{d\theta} \right) + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] \cdot P &= 0 \end{aligned}$$

Für die erste DGL ergibt sich die Lösung $U_l = A_l \cdot r^{l+1} + B_l \cdot r^{1-l}$.

Setzt man $m^2 = 0$, so erhält man aus den obigen Überlegungen die Lösung der **Laplace-Gleichung für Probleme mit azimuthaler Symmetrie**. Die Lösung ist dann nicht vom Winkel ϕ abhängig. Aus Der DGL für P ergibt sich mit der Definition $x := \cos \theta$ die gewöhnliche Legendre'sche Differentialgleichung:

$$\frac{d}{dx} \left((1-x^2) \cdot \frac{dP(x)}{dx} \right) + l(l+1) \cdot P(x) = 0$$

Daraus erhält man die Lösungsfunktionen $P_l(x)$ ($l \in \mathbb{N}_0$):

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l \cdot l!} \cdot \frac{d^l (x^2 - 1)^l}{dx^l}$$

Damit erhält man als Lösung der Laplace-Gleichung für azimutale Symmetrie:

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left[A_l r^l + B_l r^{-(l+1)} \right] \cdot P_l(\cos \theta) \quad (7.5.1)$$

Für **Probleme mit sphärischer Symmetrie** ist $m \in \mathbb{Z}$ beliebig und man erhält mit $m := \cos \theta$ für P die zugeordnete Legendre'sche DGL mit den Lösungen:

$$P_l^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \cdot \frac{d^m P_l(x)}{dx^m}$$

Da sowohl die $P_l^m(x)$, als auch die $Q_m(\phi)$ ein orthogonales Funktionensystem bilden, so ist auch Ihr Produkt $Y_{l,m}(\theta, \phi) := c \cdot P_l^m(\cos \theta) \cdot Q_m(\phi)$ ein orthogonales Funktionensystem. Mit der richtigen Normierungskonstante c ergeben sich die sog. **Kugelflächenfunktionen**:

$$Y_{l,m}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} \cdot P_l^m(\cos \theta) \cdot e^{im\phi}$$

Sie haben folgende Eigenschaften:

- *komplexe Konjugation:*

$$Y_{l,-m}(\theta, \phi) = (-1)^m Y_{l,m}^*(\theta, \phi) \quad (7.5.2)$$

- *Orthonormalitätsrelation:*

$$\int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} Y_{l',m'}^*(\theta, \phi) \cdot Y_{l,m}(\theta, \phi) \underbrace{\cos \theta \, d\theta \, d\phi}_{= d\Omega} = \delta_{l'l} \cdot \delta_{m'm} \quad (7.5.3)$$

- *Entwicklung nach Kugelflächenfunktionen:* Eine Funktion $g(\theta, \phi)$ mit $0 \leq \phi \leq 2\pi$ und $0 \leq \theta \leq \pi$ lässt sich nach Kugelflächenfunktionen entwickeln:

$$g(\theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l A_{lm} Y_{l,m}(\theta, \phi) \quad \text{mit: } A_{lm} := \int Y_{l,m}^*(\theta, \phi) \cdot g(\theta, \phi) \, d\Omega \quad (7.5.4)$$

Damit erhält man als Lösung der Laplace-Gleichung für sphärische Symmetrie:

$$\Phi(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left[A_{lm} r^l + B_{lm} r^{-(l+1)} \right] \cdot Y_{l,m}(\theta, \phi) \quad (7.5.5)$$

7.5.3. Metallkugel im homogenen elektrischen Feld

Eine Metallkugel (Radius R) werde in eine anfangs homogenes elektrisches Feld $\vec{E}_0 = E_0 \vec{e}_z$ gebracht. Die Frage ist nun, welche Feldverteilung sich außerhalb der Kugel einstellen wird. Man legt den Koordinatenursprung in den Mittelpunkt der Kugel. Das Problem ist dann rotationssymmetrisch um die z -Achse. Man kann also (7.5.1) als Lösung der Laplace-Gleichung verwenden. Es bleibt dann noch die Bestimmung der Koeffizienten A_l und B_l . Das Potential, dass zum konstanten Feld \vec{E}_0 führt ist $\varphi_0(\vec{r}) = -E_0 z$. Da der Einfluss der Metallkugel für $z \rightarrow \infty$ verschwinden muss, muss $\varphi \rightarrow \varphi_0$ ($z \rightarrow \infty$) gelten. Mit der Darstellung $z = r \cdot \cos \theta$ von z in Kugelkoordinaten erhält man also:

$$\varphi(r \rightarrow \infty) = -E_0 r \cos \theta$$

Vergleicht man dies mit

$$\varphi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left[A_l r^l + B_l r^{-(l+1)} \right] \cdot P_l(\cos \theta),$$

so stellt man fest, dass nur A_0 und A_1 einen Beitrag liefern darf. Alle $A_{l,l>1}$ müssen 0 sein, weil $\varphi(r, \theta)$ sonst divergieren würde. Der Term $B_l r^{-(l+1)} = B_l \frac{1}{r^{l+1}}$ verschwindet in diesem Grenzf. Mit $P_0(\cos \theta) = 1$ und $P_1(\cos \theta) = \cos \theta$ folgt aus obiger Bedingung noch

$$A_0 = 0 \quad \text{und} \quad A_1 = -E_0$$

Auf dem Rand der Kugel muss das Potential verschwinden, also gilt:

$$\varphi(R, \theta) = 0$$

Daraus erhält man:

$$\varphi(R, \theta) = \frac{B_0}{R} - E_0 R \cos \theta + \frac{B_1}{R^2} \cos \theta + \frac{B_2}{R^3} P_2(\cos \theta) + \dots \stackrel{!}{=} 0$$

Man erhält also folgende Bedingung:

$$B_1 = E_0 R^3 \quad \text{und} \quad B_{l \neq 1} = 0$$

Damit hat das Potential außerhalb der Kugel folgende Form:

$$\varphi(r, \theta) = E_0 \cdot \left(\frac{R^3}{r^2} - r \right) \cdot \cos \theta$$

Dieses Ergebnis ist in Abb. 7.6 dargestellt.

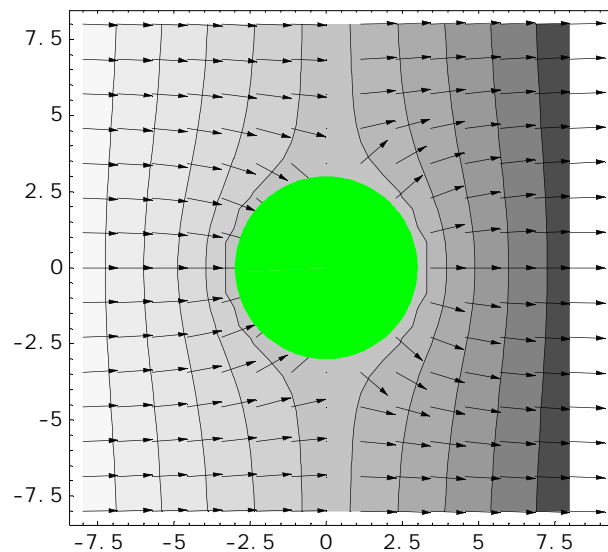


Abb. 7.6.: Metallkugel im homogenen elektrischen Feld

Die Oberflächenladungsdichte auf der Kugel ergibt sich über

$$\sigma(\theta) = -\frac{1}{4\pi} \left. \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_{r=R} = \frac{3E_0}{4\pi} \cos \theta$$

Das bedeutet, dass für $x = 0$, also an den Durchstoßpunkten der z -Achse durch die Kugel die größte Ladung influenziert wird. Die Integration über die gesamte Kugeloberfläche ergibt aber $\sigma_{\text{ges}} = 0$, sodass die Ladungserhaltung erfüllt ist. Eine geerdete Kugel würde sich also auch nicht anders als eine geladene Kugel verhalten.

7.6. Multipolentwicklung

Für das elektrische Potential gilt nach (7.2.1):

$$\varphi(\vec{x}) = \int \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x'$$

Das Potential hängt also von einem Faktor $\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$ ab. Für große Abstände $|\vec{x} - \vec{x}'| \gg 1$ kann man dies so entwickeln:

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \frac{1}{|\vec{x}|} + \sum_i x'_i \frac{\partial}{\partial x'_i} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \bigg|_{\vec{x}'=0} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} x'_i x'_j \frac{\partial}{\partial x'_i} \frac{\partial}{\partial x'_j} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \bigg|_{\vec{x}'=0} + \dots \quad (7.6.1)$$

Man benutzt dann weiter

$$\frac{\partial}{\partial x'_i} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \bigg|_{\vec{x}'=0} = - \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \bigg|_{\vec{x}'=0} = - \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{|\vec{x}|} = \frac{x_i}{|\vec{x}|^3} \quad (7.6.2)$$

und erhält:

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \frac{1}{|\vec{x}|} + \sum_i \frac{x'_i x_i}{|\vec{x}|^3} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} x'_i x'_j \left(\frac{3x_i x_j}{|\vec{x}|^5} - \frac{\delta_{ij}}{|\vec{x}|^3} \right) + \dots \quad (7.6.3)$$

Setzt man dies in die Beziehung für das elektrische Potential ein, so ergeben sich folgende Terme:

1. Monopolmoment (Ladung):

$$\varphi_0(\vec{x}) = \frac{1}{|\vec{x}|} \int \rho(\vec{x}') d^3x' = \frac{Q}{|\vec{x}|} \quad (7.6.4)$$

Dabei tritt die Ladung $Q = \int \rho(\vec{x}') d^3x'$ auf.

2. Dipolmoment:

$$\varphi_1(\vec{x}) = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3} \int \vec{x}' \rho(\vec{x}') d^3x' = \frac{\vec{x} \cdot \vec{p}}{|\vec{x}|^3} \quad (7.6.5)$$

Dabei wurde das Dipolmoment $\vec{p} = \int \vec{x}' \rho(\vec{x}') d^3x'$ verwendet. Formal ergibt sich also das Feld eines Dipols, wie es in Abschnitt 7.3.7 berechnet wurde.

3. Quadrupolmoment:

$$\varphi_2(\vec{x}) = \sum_{ij} \frac{3x_i x_j - |\vec{x}|^2 \delta_{ij}}{2|\vec{x}|^5} \int x'_i x'_j \rho(\vec{x}') d^3x' \quad (7.6.6)$$

Es gilt folgender etwas komplizierter anmutender Ausdruck:

$$0 = \sum_{ij} \frac{3x_i x_j - |\vec{x}|^2 \delta_{ij}}{6|\vec{x}|^5} \int |\vec{x}'|^2 \delta_{ij} \rho(\vec{x}') d^3x'$$

Subtrahiert man diesen von (7.6.6), so erhält man:

$$\varphi_2(\vec{x}) = \sum_{ij} \frac{3x_i x_j - |\vec{x}|^2 \delta_{ij}}{2|\vec{x}|^5} \int (3x'_i x'_j - |\vec{x}'|^2 \delta_{ij}) \rho(\vec{x}') d^3x' = \sum_{ij} \frac{3x_i x_j - |\vec{x}|^2 \delta_{ij}}{6|\vec{x}|^5} Q_{ij} \quad (7.6.7)$$

Dabei wurde das sog. Quadrupolmoment $Q_{ij} = \int (3x'_i x'_j - |\vec{x}'|^2 \delta_{ij}) \rho(\vec{x}') d^3x'$ verwendet. Es gilt $\text{Spur}(Q_{ij}) = 0$. Damit muss der Term $\propto |\vec{x}|^2 \delta_{ij}$ insgesamt verschwinden und man kann auch schreiben:

$$\varphi_2(\vec{x}) = \sum_{ij} \frac{3x_i x_j}{6|\vec{x}|^5} Q_{ij} \quad (7.6.8)$$

Das sich so ergebende Potential entspricht demjenigen eines elektrischen Quadrupols, also zweier antiparalleler Dipole.

Aus diesen ersten Termen der Entwicklung kann man dann zusammensetzen:

Satz 7.10 (Multipolentwicklung) Das Skalarpotential einer auf $|\vec{x}| < R_0$ begrenzten Ladungsverteilung lässt sich für $|\vec{x}| \gg R_0$ in folgender Weise entwickeln:

$$\varphi(\vec{x}) = \frac{Q}{|\vec{x}|} + \frac{\vec{x} \cdot \vec{p}}{|\vec{x}|^3} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{x_i x_j}{|\vec{x}|^5} Q_{ij} + \dots \quad (7.6.9)$$

Dabei sind:

$$Q = \int \rho(\vec{x}') d^3 x' \quad \text{Ladung} \quad (7.6.10)$$

$$\vec{p} = \int \vec{x}' \rho(\vec{x}') d^3 x' \quad \text{Dipolmoment} \quad (7.6.11)$$

$$Q_{ij} = \int (3x'_i x'_j - |\vec{x}'|^2 \delta_{ij}) \rho(\vec{x}') d^3 x' \quad \text{Quadrupolmoment} \quad (7.6.12)$$

In Kugelkoordinaten wird (7.6.9) noch etwas einfacher:

$$\varphi(\vec{x}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} \frac{q_{l,m}}{r^{l+1}} Y_{l,m}(\theta, \varphi) \quad (7.6.13)$$

Das Feld wird also in Kugelflächenfunktionen entwickelt. Dabei gilt noch:

$$q_{l,m} = \int r'^l \rho(\vec{x}') Y_{l,m}^*(\theta', \varphi') d^3 x' \quad (7.6.14)$$

Hierbei ist $q_{0,0} = \frac{Q}{4\pi}$ die Ladung. Die $l = 1$ -Terme enthalten das Dipolmoment usw.

Bei der Berechnung der Multipol-Entwicklung kann man Symmetrien des Systems ausnutzen. So verschwindet etwa der Monopolterm, wenn eine gleiche Anzahl positiver und negativer Ladungen vorhanden ist. Der Dipolterm verschwindet, wenn es zu jedem Dipol einen gegengleich gerichteten zweiten Dipol gibt.

8. Magnetostatik

8.1. Elektrischer Strom

In diesem Abschnitt werden die stationären Phänomene des magnetischen Feldes behandelt. D.h. weder die Ströme \vec{j} , noch die Ladungsverteilungen ρ ändern sich mit der Zeit.

Definition 8.1 (Stromdichte, Strom) Die Stromdichte ist definiert als die Ladung dQ , die in der Zeit dt durch die Fläche $d\vec{A} = \vec{n} \cdot dA$ fließt:

$$\vec{j} = \vec{n} \cdot \frac{dQ}{dt \cdot dA} \quad (8.1.1)$$

Der elektrische Strom I durch eine Fläche F ist gegeben durch:

$$I = \int_F \vec{j} \cdot d\vec{A} = \frac{dQ}{dt} \Rightarrow \vec{j} = \frac{dI}{dA} \quad (8.1.2)$$

Bewegt sich eine Ladungsverteilung ρ mit der Geschwindigkeit \vec{v} , so gilt noch:

$$\vec{j} = \rho \vec{v} \quad (8.1.3)$$

Die elektrische Ladung bleibt erhalten. Dies führt auf die sog. Kontinuitätsgleichung. Dazu betrachtet man ein Volumen V und berechnet die zeitliche Änderung der Ladung:

$$-\frac{dQ}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho \, dV = \int_{S=\partial V} \vec{j} \cdot d\vec{A} \stackrel{\text{Gauß-Integralsatz}}{=} \int_V \operatorname{div} \vec{j} \, dV$$

Dies bedeutet aber nichts anderes, als $\int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} \right) dV = 0$, oder:

Satz 8.1 (Kontinuitätsgleichung)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0 \quad (8.1.4)$$

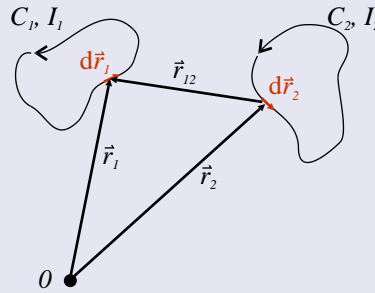
Für die Magnetostatik folgt also:

$$\operatorname{div} \vec{j} = 0,$$

da sich die Ladungsdichte ρ nach Voraussetzung nicht ändert.

8.2. Kraftgesetz und Feldgleichungen

Grundlage der Elektrostatik war das Coulomb-Gesetz, das die Kraft zwischen zwei Ladungen beschrieb. Im Falle der Magnetostatik übernimmt diese Rolle das Ampère'sche Gesetz, das die Kraft zwischen zwei stromdurchflossenen Leiterschleifen beschreibt:

Satz 8.2 (Ampère'sches Gesetz)

Die Kraft zwischen den zwei in der obigen Abbildung gezeigten Leiterschleifen C_1 und C_2 , die von den Strömen I_1, I_2 durchflossen werden ist:

$$\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\vec{r}_1 \times (d\vec{r}_2 \times \vec{r}_{12})}{r_{12}^3} \quad (8.2.1)$$

Dabei ist $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \approx 1.2566 \cdot 10^{-6} \frac{\text{N}}{\text{A}^2}$.

Aus (8.2.1) heraus kann man nun das magnetische Feld $\vec{B}(\vec{r})$ definieren:

Definition 8.2 (Magnetische Induktion, Biot-Savard-Gesetz)

$$\vec{B}_2(\vec{r}_1) = \frac{I_2}{c} \oint_{C_2} \frac{\partial d\vec{r}_2 \times \vec{r}_{12}}{\partial r_{12}^3} \propto \frac{1}{r_{12}^2} \quad (8.2.2)$$

Daraus berechnet sich dann die Kraft zu:

$$\vec{F}_{12} = I_1 \oint_{C_1} d\vec{r}_1 \times \vec{B}_2(\vec{r}_1) \quad (8.2.3)$$

Etwas allgemeiner gilt das Biot-Savard-Gesetz: Bei gegebener Stromdichte \vec{j} ergibt sich das magnetische Feld \vec{B} zu:

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{1}{c} \int \vec{j}(\vec{r}') \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3 r' \quad (8.2.4)$$

Damit berechnet sich die Kraft auf eine zweite Stromverteilung $\vec{j}_2(\vec{r})$ wirkt:

$$\vec{F} = \int [\vec{j}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r})] d^3 r \quad (8.2.5)$$

Dieses Biot-Savard-Gesetz (8.2.4) lässt sich mit folgender Beziehung weiter umformen:

$$\vec{\nabla}_{\vec{r}} \times \left[\frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \vec{\nabla}_{\vec{r}} \times \vec{j}(\vec{r}') - \vec{j}(\vec{r}') \vec{\nabla}_{\vec{r}} \times \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \vec{j}(\vec{r}') \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Damit gilt dann weiter:

$$\vec{B}(\vec{x}) = \vec{\nabla}_{\vec{r}} \times \frac{1}{c} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r'$$

Das magnetische Feld ist also ein Rotationsfeld und somit quellenfrei ($\text{div } \vec{B} = 0$). Der allgemeine Zerlegungssatz (5.0.1) liefert dann noch $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$

Die magnetischen Felder \vec{B} verhalten also sich nach folgenden Gleichungen:

Satz 8.3 (magnetostatische Feldgleichungen)

$$\operatorname{div} \vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}) = 0 \quad (8.2.6)$$

Dies bedeutet anschaulich, dass es keine Quellen oder senken des magnetischen Feldes gibt. Es gibt also keine magnetischen Monopole und Nord- und Südpole treten immer in räumlich enger Korrelation auf.

$$\operatorname{rot} \vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r}) \quad \text{bzw.} \quad \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad (8.2.7)$$

Das magnetische Feld wird also von elektrischen Strömen erzeugt. Es handelt sich um ein divergenzfreies Rotationsfeld. Mit Hilfe des Stokes'schen Satzes (4.0.6) folgt noch die integrale Darstellung von (8.2.7):

$$\int_{C=\partial F} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 \int_F \vec{j} \cdot d\vec{A} = \mu_0 I \quad (8.2.8)$$

8.3. Vektorpotential

Analog zum elektrischen Skalarpotential führt man ein Vektorpotential für das magnetische Feld \vec{B} ein:

Definition 8.3 (magnetisches Vektorpotential)

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A} = -\vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (8.3.1)$$

Dieses Potential ist invariant unter Eichtransformationen. Für eine beliebige skalare Funktion $\chi(\vec{x})$ gilt:

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A} = \operatorname{rot} \vec{A}' = \operatorname{rot}(\vec{A} + \operatorname{grad} \chi) \quad (8.3.2)$$

Nutzt man die Lorentz-Eichung $\operatorname{div} \vec{A} = 0$, die χ festlegt, so erhält man analog zur Poisson-Gleichung:

$$\Delta \vec{A}(\vec{x}) = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{x}) \quad \text{bzw.} \quad \Delta \vec{A}(\vec{x}) = -\mu_0 \vec{j}(\vec{x}) \quad (8.3.3)$$

Damit kann man folgenden Ausdruck für das magnetische Potential angeben:

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{j}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x' \quad \text{bzw.} \quad \vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x' \quad (8.3.4)$$

Die DGL (8.3.3) kann man beweisen, wenn man (3.4.3) verwendet und auf $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ anwendet:

$$\frac{4\pi}{c} \vec{j} = \vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = \underbrace{\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A})}_{=0 \text{ n.V.}} - \Delta \vec{A}$$

Mit (8.3.3) ist die Magnetostatik formal gleich aufgebaut, wie die Elektrostatik, mit dem Unterschied dass man nicht eine Differentialgleichung zu lösen hat, sondern drei gekoppelte Differentialgleichungen.

8.4. Multipolwicklung und Dipolmoment

Die Multipolentwicklung aus der Elektrostatik lässt sich formal auch für die Magnetostatik übernehmen. Der Monopolterm entfällt hier aber, da es ja wie bereits erläutert keine magnetischen Monopole gibt. Dies lässt sich aber auch mathematisch beweisen. Es gilt:

Satz 8.4 (Multipolentwicklung der Magnetostatik) Das Vektorfeld einer auf $|\vec{x}| < R_0$ begrenzten Stromdichteverteilung \vec{j} lässt sich für $|\vec{x}| \gg R_0$ in folgender Weise entwickeln:

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{\mu} \times \vec{r}}{|\vec{r}|^3} + \dots \quad (8.4.1)$$

Dabei sind:

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2} \int \vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}') d^3r' \quad \text{magn. Dipolmoment} \quad (8.4.2)$$

Befindet sich ein magnetischer Dipol in einem äußeren Feld \vec{B} so wirken auf ihn Kräfte (und damit auch Drehmomente):

Satz 8.5 (Magnetische Dipole $\vec{\mu}$ in äußeren Feldern) Der Dipol $\vec{\mu}$ liege in $\vec{r} = 0$, bzw. es liege eine räumlich um $\vec{r} = 0$ begrenzte Stromverteilung mit Dipolmoment $\vec{\mu}$ vor. Dort befinde sich auch ein örtlich schwach variierendes Magnetfeld \vec{B} . Auf den Dipol wirkt dann folgende Kraft \vec{F} und folgendes Drehmoment \vec{D} :

$$\vec{F} = \vec{\nabla}[\vec{\mu} \cdot \vec{B}]|_{\vec{r}=0} \quad \vec{D} = \vec{\mu} \times \vec{B}(\vec{r} = 0) \quad (8.4.3)$$

Die potentielle Energie eines solchen Systems ist:

$$W_{\text{magn.}} = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}(0) \quad (8.4.4)$$

8.5. Beispiele

8.5.1. Homogenes Magnetfeld

Ein homogenes Magnetfeld hat die Form $\vec{B} = B_0 \vec{e}_z$. Es zeigt hier o.B.d.A. in z -Richtung. Die Frage ist nun, wie ein Vektorpotential für ein solches Feld aussieht. Man sucht also ein \vec{A} , mit $\vec{B} = B_0 \vec{e}_z = \text{rot } \vec{A}$. Es gilt:

$$\text{rot } \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{e}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{e}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z = B_0 \vec{e}_z$$

Daraus folgen drei Bedingungen:

$$\frac{\partial A_z}{\partial y} = \frac{\partial A_y}{\partial z} \quad \frac{\partial A_x}{\partial z} = \frac{\partial A_z}{\partial x} \quad B_0 = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}$$

Setzt man nun $A_z = 0$, so bleibt $\frac{\partial A_y}{\partial z} = \frac{\partial A_x}{\partial z} = 0$ und $B_0 = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}$. Die folgende Wahl erfüllt diese Bedingungen:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\vec{B} \times \vec{r}}{2} = \frac{B_0}{2} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

8.5.2. Magnetischer Dipol

Man betrachtet die Multipolentwicklung einer kleinen Ladungsverteilung, also deren Feld (Vektorpotential) in großen Abstand. Der Monopolterm verschwindet, sodass noch der Dipolterm zu berechnen bleibt.

- **Hilfssatz:** Zunächst soll ein Hilfssatz der Magnetostatik hergeleitet werden. Wegen $\text{div } \vec{j} = 0$ gilt für beliebige skalar- oder vektorwertige Funktionen $f(\vec{r})$:

$$0 = \int f(\vec{r}') \vec{\nabla}' \cdot \vec{j}(\vec{r}') d^3r' = - \int [\vec{\nabla}' f(\vec{r}')] \cdot \vec{j}(\vec{r}') d^3r'$$

Dies folgt aus $\vec{\nabla} \cdot (f\vec{j}) = (\vec{\nabla} f) \cdot \vec{j} + f(\vec{\nabla} \cdot \vec{j})$ und dem Gauß'schen Satz, mit dem man erhält $\int \vec{\nabla} \cdot (f\vec{j}) dV = \int_{\partial V} f\vec{j} \cdot d\vec{A}$. Das letzte Integral ergibt 0, weil alle physikalisch sinnvollen Stromverteilungen im unendlichen gegen 0 gehen und der Rand ∂V im unendlichen liegt.

- **Monopolterm:** Mit diesem Hilfssatz kann man zunächst nochmals zeigen, dass der Monopolterm verschwindet:

$$\vec{A}_0(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{2\pi r} \int \vec{j}(\vec{r}') d^3 r'$$

Hieraus folgt sofort $\vec{A}_0 = 0$, wenn man im obigen Hilfssatz $\vec{f} = \vec{r}'$ setzt, denn dann ist $\vec{\nabla} \cdot \vec{f} = (1, 1, 1)^t$.

- **Dipolterm:** Es bleibt jetzt also noch das Integral

$$\vec{A}_1(\vec{x}) = \frac{\mu_0 \vec{r}}{4\pi |\vec{r}|^3} \int \vec{r}' \cdot \vec{j}(\vec{r}') d^3 r' = \frac{\mu_0}{4\pi |\vec{r}|^3} \int [\vec{r} \cdot \vec{r}'] \cdot \vec{j}(\vec{r}') d^3 r'$$

zu berechnen. Man nutzt wieder den obigen Hilfssatz und setzt dabei $f(\vec{r}') = r'_k r'_l$. Damit erhält man dann:

$$\vec{\nabla}(r'_k r'_l) = r'_l \vec{e}_k + r'_k \vec{e}_l \Rightarrow \int (r'_l j_k + r'_k j_l) d^3 r' \Rightarrow \int r'_l j_k d^3 r' = \frac{1}{2} \int (r'_l j_k - r'_k j_l) d^3 r'$$

Damit folgt weiter:

$$\sum_l r_l \int r'_l j_k d^3 r' = \frac{1}{2} \sum_l r_l \int (r'_l j_k - r'_k j_l) d^3 r'$$

Dies entspricht aber gerade dem Integral in \vec{A}_1 und es gilt weiter:

$$\vec{A}_1 = \frac{\mu_0}{2\pi |\vec{r}|^3} \cdot \frac{1}{2} \sum_l r_l \int (r'_l j_k - r'_k j_l) d^3 r' = \frac{\mu_0}{2\pi |\vec{r}|^3} \cdot \frac{1}{2} \int [(\vec{r}\vec{r}')\vec{j} - \vec{r}'(\vec{r}\vec{j})] d^3 r' = -\frac{\mu_0}{2\pi |\vec{r}|^3} \cdot \frac{1}{2} \vec{r} \times \int (\vec{r}' \times \vec{j}) d^3 r'$$

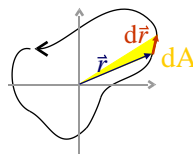
Setzt man also wie in (8.4.2) $\vec{\mu} = \frac{1}{2} \int \vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}') d^3 r$, so bleibt:

$$\vec{A}_1 = \frac{\mu_0 (\vec{r} \times \vec{\mu})}{4\pi |\vec{r}|^3}$$

Daraus kann man nun das magnetische Feld \vec{B} berechnen. Die etwas längliche Rechnung ergibt:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{3(\vec{r} \cdot \vec{\mu})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{\mu}}{r^3} \right]$$

Das magnetische Dipolfeld in Dipolnäherung hat also die selbe Form, wie das elektrische Dipolfeld in der selben Näherung (siehe Abschnitt 7.3.7).



Betrachtet man eine Leiterschleife, wie in der Abbildung oben, so kann man leicht deren magnetisches Moment berechnen. Der Strom fließt entlang einem unendlich dünnen Weg C , man kann also ersetzen $\vec{j} d^3 r = I d\vec{r}$. Es gilt dann:

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2} \int \vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}') d^3 r = \frac{I}{2} \int \vec{r}' \times d\vec{r} = IF$$

Dies gilt, weil $|\vec{r}' \times d\vec{r}| = 2 \cdot dA$ gilt (siehe Zeichnung).

8.5.3. Stromdurchflossene Spule

Man betrachtet eine stromdurchflossene Spule, die sich unendlich in z -Richtung ausdehnt. Wegen der unendlichen Ausdehnung ist das Feld außerhalb 0.

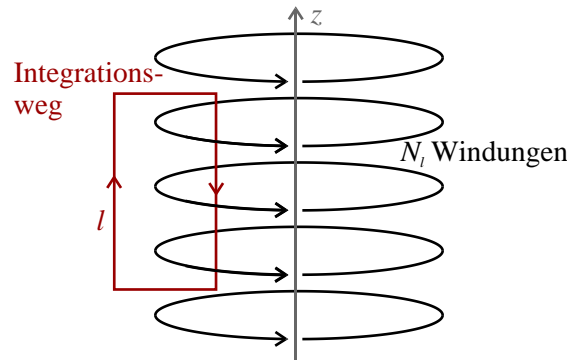


Abb. 8.1.: idealisierte Spule

Mit (8.2.8) kann man entlang dem in Abb. 8.1 eingezeichneten Weg integrieren. Auf der Länge l fließt der Strom I N_l mal durch die Integrationsfläche. Die Symmetrie des Systems legt nahe, dass das Feld im Inneren homogen ist. Man kann also rechnen:

$$\oint \vec{b} \cdot d\vec{s} = |B| \cdot l = \mu_0 \cdot N_l \cdot I \Rightarrow |\vec{B}| = \mu_0 I \frac{N_l}{l}$$

Ein anderer Weg zur Berechnung dieses Ergebnisses ist dieser: Man geht von dem magnetischen Feld einer einzelnen (kreisförmigen) Leiterschleife aus (siehe Abschnitt 8.5.2). Nun integriert (oder summiert) man über sehr viele dieser Leiterschleifen. Mit entsprechenden Näherungen erhält man auch so ein homogenes Feld, wie oben.

8.5.4. Stromdurchflossener Draht, Ohm'sches Gesetz

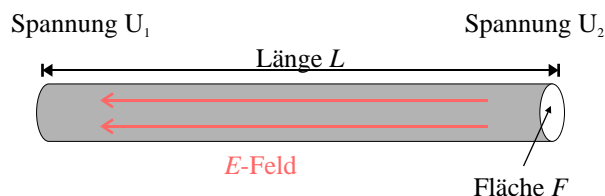


Abb. 8.2.: Stromdurchflossener Draht

In einem Draht mit dem Querschnitt F fließt der Strom I . Der Draht bestehe aus einem Material der Leitfähigkeit $\sigma = \frac{1}{\rho}$, wobei ρ der spezifische Widerstand ist. Damit ergibt sich die Stromdichte

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} = \frac{\partial I}{\partial A}.$$

Somit ist das elektrische Feld im Draht festgelegt und es muss zwischen oberem und unterem Ende eine Spannungsdifferenz $U = U_2 - U_1 = EL$ herrschen. Der fließende Strom ist

$$I = F |\vec{j}| = F \sigma |\vec{E}|.$$

Der Ohm'sche Widerstand ist gegeben durch:

$$R = \frac{U}{I} = \frac{EL}{F\sigma E} = \frac{L}{\sigma F} = \rho \frac{L}{F}.$$

Hier gilt das

Satz 8.6 (Ohm'sches Gesetz) *Das Ohm'sche Gesetz setzt Feld und Stromdicht, bzw. Spannung und Strom in Beziehung:*

$$U = RI \quad \vec{j} = \sigma \vec{E} \Leftrightarrow \vec{E} = \rho \vec{j} \quad (8.5.1)$$

Dabei ist $\sigma = \frac{1}{\rho}$ die Leitfähigkeit. Der elektrische Widerstand ergibt sich zu:

$$R = \rho \cdot \frac{L}{F} \quad (8.5.2)$$

Dabei ist L die Länge und F der Querschnitt des Leiters.

9. Maxwell-Gleichungen und Lorentz-Kraft

In den folgenden Kapiteln soll die Elektrodynamik ausgehend von den Maxwell-Gleichungen aufgebaut werden. Dieser Ansatz entspricht nicht unbedingt dem üblichen Vorgehen in Lehrbüchern und Vorlesungen, in denen die Maxwell-Gleichungen besser motiviert werden. Hier werden sie nur eingeführt und motiviert. Eine ausführliche Erläuterung der statischen Gleichungen ist ja schon in den Abschnitten 7 und 8 erfolgt. Man beginnt also mit dem wichtigen Satz:

Satz 9.1 (Maxwell-Gleichungen) Die folgenden Gleichungen (I)-(IV) sind die Maxwell-Gleichungen im Vakuum. Die linke Spalte stellt die Gleichungen im cgs- und die rechte Spalte im MKSA-System dar.

$$\operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}, t) = 4\pi\rho(\vec{r}, t) \qquad \operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{\rho(\vec{r}, t)}{\epsilon_0} \qquad \text{(I)}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} \qquad \operatorname{rot} \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} \qquad \text{(II)}$$

$$\operatorname{div} \vec{B}(\vec{r}, t) = 0 \qquad \operatorname{div} \vec{B}(\vec{r}, t) = 0 \qquad \text{(III)}$$

$$\operatorname{rot} \vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r}, t) \qquad \operatorname{rot} \vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} + \mu_0 \vec{j}(\vec{r}, t) \qquad \text{(IV)}$$

Man kann diese Gleichungen auch in integraler Form anschreiben:

$$\oint_{\partial V} \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{A} = 4\pi \int_V \rho(\vec{r}, t) dV = 4\pi Q(t) \qquad \text{(I}_i\text{)}$$

$$\oint_{\partial F} \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{s} = -\frac{1}{c} \int_F \frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} \cdot d\vec{A} \qquad \text{(II}_i\text{)}$$

$$\oint_{\partial V} \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{A} = 0 \qquad \text{(III}_i\text{)}$$

$$\oint_{\partial F} \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{s} = \frac{1}{c} \int_F \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} \cdot d\vec{A} + \frac{4\pi}{c} \int_F \vec{j}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{A} = \frac{4\pi}{c} \int_F [\vec{j}_V(\vec{r}, t) + \vec{j}(\vec{r}, t)] \cdot d\vec{A} \qquad \text{(IV}_i\text{)}$$

Dabei ist

$$\vec{j}_V(\vec{r}, t) = 4\pi \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} \qquad \vec{j}_V(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} \qquad \text{(9.1)}$$

der Maxwell'sche Verschiebestrom.

Die Maxwell-Gleichungen spiegeln experimentelle Erfahrungstatsachen wieder. Man fasst diese üblicherweise in den folgenden Gesetzen zusammen:

(I_i) **Gauß'sches Gesetz:** Der elektrische Fluss

$$\Phi_{el} = \oint_{\partial V} \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{A} \qquad \text{(9.2)}$$

durch eine geschlossene Fläche ist proportional der in ihr enthaltenen Gesamtladung Q .

(II_i) **Faraday'sches Induktionsgesetz:** Ein sich auf der Fläche F änderndes magnetisches Feld induziert ein elektrisches Feld, das um die Richtung des der zeitlichen Änderung zirkuliert (Wirbelfeld, nicht-konservativ!).

Die so induzierten Ströme wirken dem erzeugenden Magnetfeld entgegen (**Lenz'sche Regel**). Dies bedeutet auch, dass ein sich zeitlich änderndes Magnetfeld eine elektrische Spannung

$$U(t) = \oint_{\partial F} \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{s} = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi_{\text{magn}}(t)}{dt} \quad (9.3)$$

induziert. Dabei ist

$$\Phi_{\text{magn}}(t) = \int_{F(t)} \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{A} \quad (9.4)$$

der magnetische Fluss durch die (zeitlich variable) Fläche $F(t)$.

(III_i) **Es gibt keine magnetischen Monopole:** Dieses Gesetz besagt, dass es keine Quellen- und Senken des magnetischen Feldes gibt. Es kann also auch keine magnetischen Monopole geben.

(IV_i) **Maxwell'scher Verschiebestrom, Ampère'sches Gesetz:** Der Verschiebestrom $\vec{j}_V(\vec{r}, t) = 4\pi \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t}$ wurde von Maxwell in die Gleichungen eingeführt, da das Gleichungssystem sonst im Widerspruch zur Kontinuitätsgleichung steht. Außerdem würde mit $\vec{j}_V = 0$ im Ladungs- und Stromfreien Vakuum ($\rho = 0, \vec{j} = 0$) folgen, dass sowohl \vec{E} , als auch \vec{B} rotations- und divergenzfrei sind und somit identisch 0 (siehe Abschnitt 5). Damit wären aber keine elektromagnetischen Wellen im Vakuum möglich. Außerdem besagt diese Gleichung, dass ein Strom $I(t) = \int_F \vec{j}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{A}$ ein magnetisches Feld induziert, dessen geschlossene Feldlinien um den Strom zirkulieren.

Es bleibt noch zu bemerken, dass die Maxwell-Gleichungen einen Satz von linearen, partiellen Differentialgleichungen darstellen und somit das Superpositionsprinzip für ihre Lösungen anwendbar ist. Dies wurde in den Abschnitten 7 und 8 schon diskutiert.

Die Theorie wird durch ein Kraftgesetz vervollständigt, das angibt, wie sich die Kraft auf eine bewegte Probeladung q aus den Feldern berechnet:

Satz 9.2 (Lorentz-Kraft)

$$\vec{F}_L(vr, t) = q \cdot \left(\vec{E}(\vec{r}, t) + \frac{\vec{v}(t) \times \vec{B}(\vec{r}, t)}{c} \right) \quad \vec{F}_L(vr, t) = q \cdot \left(\vec{E}(\vec{r}, t) + \vec{v}(t) \times \vec{B}(\vec{r}, t) \right) \quad (9.5)$$

Links steht die Formel in cgs-, rechts in MKSA-Einheiten. Die Ladung bewegt sich mit der Geschwindigkeit $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ durch den Raum.

Die Kraft durch das Magnetfeld ($\vec{v} \times \vec{B}$) steht senkrecht auf Bewegungsrichtung und Magnetfeld der Ladung, sodass sie keine Arbeit an dem Teilchen verrichtet.

Als letzte wichtige Gleichung der Elektrodynamik soll noch die Kontinuitätsgleichung dargestellt werden, die die Ladungserhaltung wiedergibt. Es zeigt sich, dass sie aus den Maxwell-Gleichungen ableitbar und somit mit diesen verträglich ist.

Satz 9.3 (Kontinuitätsgleichung)

$$\frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t} + \text{div } \vec{j}(\vec{r}, t) = 0 \quad (9.6)$$

Diese Gleichung hat in cgs- und in MKSA-Einheiten die selbe Form. Man kann sie auch in integraler Form darstellen:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho(\vec{r}, t) dV = - \oint_{\partial V} \vec{j}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{A} \quad (9.7)$$

10. Energie- und Impulssatz

10.1. Energiesatz

Dieser Abschnitt widmet sich dem Energieerhaltungssatz für das elektromagnetische Feld. Dazu geht man von einem punktförmigen Teilchen der Ladung q , das sich in einem elektromagnetischen Feld (\vec{E}, \vec{B}) mit der Geschwindigkeit $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ bewegt. Auf das Teilchen wirkt dann die Lorentzkraft (9.5):

$$\vec{F}_L = q \cdot \left(\vec{E} + \frac{\vec{v} \times \vec{B}}{c} \right)$$

Wie bereits im letzten Kapitel erläutert wurde leistet nur das elektrische Feld Arbeit am Teilchen, sodass man die infinitesimale Energiezunahme dW bei einer Verschiebung um $d\vec{r}$ erhält:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = q\vec{E} \cdot d\vec{r} \quad (10.1)$$

Geschieht diese Verschiebung in der Zeit dt , so entspricht dies der folgenden Leistung:

$$\frac{dW}{dt} = q\vec{E} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = q\vec{E} \cdot \vec{v} \quad (10.2)$$

Geht man nun zu kontinuierlichen Ladungsverteilungen $\rho(\vec{r}, t)$ über, so bleiben obige Überlegungen gültig und man erhält zunächst die „Kraftdichte“ (Kraft/Volumen):

$$\vec{f}(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t) \cdot \left(\vec{E}(\vec{r}, t) + \frac{\vec{v}(\vec{r}, t) \times \vec{B}(\vec{r}, t)}{c} \right) \quad (10.3)$$

Daraus kann man die Leistungsdichte $\vec{f} \cdot \vec{v}$ und schließlich durch Integration die gesamte Arbeitsleistung im Volumen V berechnen:

$$\frac{dW}{dV dt} = \vec{v} \cdot \vec{f} = \rho \vec{E} \cdot \vec{v} = \vec{j} \cdot \vec{E} \quad \Rightarrow \quad \frac{dW}{dt} = \int_V \vec{j} \cdot \vec{E} dV \quad (10.4)$$

Nun nutzt man die Maxwell-Gleichung (IV), und stellt diese etwas um:

$$\vec{j} = \frac{c}{4\pi} \left[\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right] =$$

Es gilt dann (mit (3.4.7) im zweiten Schritt):

$$\frac{dW}{dt} = \frac{c}{4\pi} \int_V \left[\vec{E} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c} \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right] dV = \frac{c}{4\pi} \int_V \left[\underbrace{\vec{B} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{E}}_{= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}} - \text{div}(\vec{E} \times \vec{B}) - \frac{1}{c} \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right] dV$$

Man erhält also insgesamt:

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{c}{4\pi} \int_V \left[\frac{1}{c} \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \frac{1}{c} \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \text{div}(\vec{E} \times \vec{B}) \right] dV \quad (10.5)$$

Man definiert nun:

Definition 10.1 (Poynting-Vektor)

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{B}) \quad (10.6)$$

Definition 10.2 (Energiedichte des elektromagnetischen Feldes)

$$\omega_{EM} = \frac{1}{8\pi} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) \quad (10.7)$$

Mit diesen beiden neuen Größen kann man nun (10.5) umformen:

$$\frac{dW}{dt} = - \int_V \left[\frac{1}{4\pi} \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \frac{1}{4\pi} \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{c}{4\pi} \operatorname{div}(\vec{E} \times \vec{B}) \right] dV = - \int_V \left(\frac{\partial \omega_{EM}}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{S} \right) dV = \int_V \vec{j} \cdot \vec{E} dV \quad (10.8)$$

Es gilt also der folgende Satz:

Satz 10.1 (Poynting Theorem: Energiesatz der Elektrodynamik) Für eine beliebiges EM-Feld gilt die folgende Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial \omega_{EM}}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{S} = -\vec{j} \cdot \vec{E} = -\frac{\partial \omega_{mech}}{\partial t} \Leftrightarrow -\operatorname{div} \vec{S} = \frac{\partial \omega_{mech}}{\partial t} + \frac{\partial \omega_{EM}}{\partial t} \quad (10.9)$$

Dabei ist

$$\omega_{EM} = \frac{1}{8\pi} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2)$$

die **elektromagnetische Energiedichte** und

$$\frac{\partial \omega_{mech}}{\partial t} = \vec{j} \cdot \vec{E}$$

die zeitliche Ableitung der **mechanischen Energiedichte** des Feldes. Der **Poynting-Vektor** ist

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{B}).$$

Der Poynting-Vektor repräsentiert also die Energiestromdichte des elektromagnetischen Feldes. Er zeigt in die Richtung, in die die Energie im Feld transportiert wird.

Mit Hilfe des Gauß'schen Satzes kann man das Poynting-Theorem auch so formulieren:

$$\frac{d}{dt} (E_{mech} + E_{EM}) = - \oint_{\partial V} \vec{S} \cdot d\vec{A}$$

Die Änderung der Energie (mechanisch + Feldenergie) in einem Volumen V ist gleich dem Energiefluss durch dessen Oberfläche ∂V . Wird V unendlich groß, so befinden sich die betrachteten Ladungen und Felder vollständig innerhalb V (physikalisch sinnvolle Felder sollten im unendlichen gegen 0 gehen) und man erhält die Energieerhaltung, weil in obiger Formel der Fluss durch ∂V null wird.

10.2. Impulssatz

Der Impulssatz der Elektrodynamik folgt ebenfalls aus der Lorentz-Kraft (9.5) für eine Punktladung q :

$$m\ddot{\vec{r}} = \frac{d\vec{p}_{mech}}{dt} = \vec{F}_L = q \cdot \left(\vec{E} + \frac{\vec{v} \times \vec{B}}{c} \right)$$

Betrachtet man nun eine Ladungsdichte ρ , so folgt aus obiger Gleichung:

$$\frac{d\vec{p}_{mech}}{dt} = \int_V \rho \cdot \left(\vec{E} + \frac{\vec{v} \times \vec{B}}{c} \right) dV \quad (10.1)$$

Wie im letzten Abschnitt wird nun die Ladungsdichte und die Stromdichte mit Hilfe der Maxwell-Gleichungen (I) und (IV):

$$\rho = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \vec{E} \quad \vec{j} = \frac{c}{4\pi} \left(\operatorname{rot} \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

Man erhält dann aus (10.1):

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{p}_{\text{mech}}}{dt} &= \frac{1}{4\pi} \int_V \text{div } \vec{E} \cdot \left[\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{c}{4\pi} \left(\text{rot } \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \times \vec{B} \right] dV = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_V \left[\vec{E} \cdot (\text{div } \vec{E}) + (\text{rot } \vec{B}) \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \times \vec{B} \right] dV \quad (10.2) \end{aligned}$$

Man nutzt nun zwei mathematische Tricks. Zum einen addiert man $(\text{div } \vec{B}) \cdot \vec{B} = 0$ (gilt nach (III)). Zum anderen nutzt man

$$\frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \vec{B}) = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \times \vec{B} + \vec{E} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Es ergibt sich dann:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{p}_{\text{mech}}}{dt} &= \frac{1}{4\pi} \int_V \left[\vec{E} \cdot (\text{div } \vec{E}) + (\text{div } \vec{B}) \cdot \vec{B} + (\text{rot } \vec{B}) \times \vec{B} + \frac{1}{c} \vec{E} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \vec{B}) \right] dV = \\ &\stackrel{\text{(II)}}{=} \frac{1}{4\pi} \int_V \left[\vec{E} \cdot (\text{div } \vec{E}) + (\text{div } \vec{B}) \cdot \vec{B} + (\text{rot } \vec{B}) \times \vec{B} - \vec{E} \times (\text{rot } \vec{E}) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \vec{B}) \right] dV \quad (10.3) \end{aligned}$$

Dies lässt sich noch umstellen:

$$\frac{d\vec{p}_{\text{mech}}}{dt} + \frac{d}{dt} \frac{1}{4\pi c} \int_V (\vec{E} \times \vec{B}) dV = \frac{1}{4\pi} \int_V \left[\vec{E} \cdot (\text{div } \vec{E}) + (\text{div } \vec{B}) \cdot \vec{B} + (\text{rot } \vec{B}) \times \vec{B} - \vec{E} \times (\text{rot } \vec{E}) \right] dV \quad (10.4)$$

Man definiert nun:

Definition 10.3 (Impuls(dichte) des elektromagnetischen Feldes) Der *Impuls des elektromagnetischen Feldes* ist:

$$\vec{p}_{EM} = \frac{1}{4\pi c} \int_V (\vec{E} \times \vec{B}) dV = \int_V \frac{\vec{S}}{c^2} dV \quad (10.5)$$

Dabei ist \vec{S} der Poynting-Vektor und man kann $\frac{\vec{S}}{c^2}$ als **Impulsdichte** des EM-feldes bezeichnen.

Das rechte Integral in (10.4) lässt sich als Divergenz des Maxwell'schen Spannungstensors T_{ij} schreiben (ohne Beweis). Mit der Einstein'schen Summenkonvention kann man dann schreiben (für die i -te Komponente der Impulsableitung/Kraft):

$$\frac{d}{dt} [\vec{p}_{\text{mech}} + \vec{p}_{EM}]_i = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\partial}{\partial x_i} \left[E_i E_j + B_i B_j - \frac{\delta_{ij}}{2} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) \right] dV = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_i} dV \quad (10.6)$$

Zusammenfassend erhält man also:

Satz 10.2 (Impulssatz der Elektrodynamik) Für eine beliebiges EM-Feld gilt der folgende Impulssatz:

$$\frac{d}{dt} [\vec{p}_{\text{mech}} + \vec{p}_{\text{EM}}]_i = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div}(T_{ij}) = \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \quad (10.7)$$

Dabei ist

$$\vec{p}_{\text{EM}} = \frac{\vec{S}}{c^2} = \frac{1}{4\pi c} (\vec{E} \times \vec{B})$$

die **elektromagnetische Impulsdichte** und

$$\frac{\partial \vec{p}_{\text{mech}}}{\partial t} = \rho \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{j} \times \vec{B}$$

die zeitliche Ableitung der **mechanischen Impulsdichte** des Feldes. Der **Poynting-Vektor** ist

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{B}).$$

Der **Maxwell'sche Spannungstensor** ist definiert durch:

$$T_{ik} = \frac{1}{4\pi} \left[E_i E_k + B_i B_k - \frac{\delta_{ij}}{2} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) \right] \quad (10.8)$$

Interpretiert man den Spannungstensor als Impulsstromdichte, so kann man (10.7) wieder als Kontinuitätsgleichung auffassen.

Zur Interpretation des Spannungstensors: Man kann den Ausdruck

$$K_i = - \sum_{j=1}^3 T_{ij} n_j \cdot \Delta A \quad \Leftrightarrow \quad \vec{K} = -\mathbf{T} \vec{n} \cdot \Delta A$$

als i -te Komponente einer Kraft durch das Feld auf die Fläche ΔA auffassen ($\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)^t$ ist deren Normalenvektor). Wird die Strahlung des Feldes nun von einem (geschwärzten) Flächenelement $d\vec{A} = \vec{n} \cdot \Delta A$ absorbiert (\vec{n} = Normalenvektor), so führt dies zum Betrag der Kraft (Normalkomponente)

$$\vec{K} \cdot \vec{n} = - \sum_{i,j} T_{ij} n_j m_i \Delta A \quad \Leftrightarrow \quad \vec{K} = -(\mathbf{T} \vec{n}) \cdot \vec{n} \cdot \Delta A.$$

Diese bedeutet aber einen Strahlungsdruck von

$$P_{\text{Strahlung}} = \frac{\vec{K} \cdot \vec{n}}{\Delta F} = - \sum_{i,j} T_{ij} n_i n_j = -(\mathbf{T} \vec{n}) \cdot \vec{n}.$$

Dies bedeutet, dass durch ein Strahlungsfeld neben Energie auch Impuls auf einen Absorber übertragen werden kann. Ein Beispiel hierfür ist der Schweif eines Kometen, der durch den Strahlungsdruck der Sonne von dieser weggedrückt wird. Der Energieübertrag wird beim Kometen dadurch sichtbar, dass sich Staub und Wasserdampf von seiner Oberfläche löst (Aufheizen in Sonnennähe).

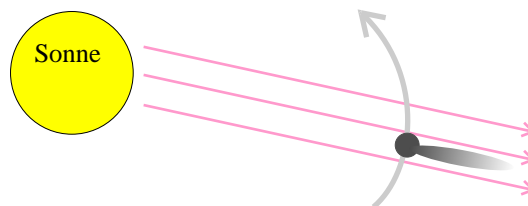


Abb. 10.1.: Schematische Skizze zur Schweifbildung bei Kometen

11. Skalar- und Vektorpotential in der Elektrodynamik

11.1. Definition

Analog zum Ansatz in der Elektro- und Magnetostatik definiert man (etwas erweitert):

Definition 11.1 (Vektorpotential \vec{A} , Skalarpotential φ)

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \text{rot } \vec{A}(\vec{r}, t) \quad (11.1.1)$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = - \left(\text{grad } \varphi(\vec{r}, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t} \right) \quad (11.1.2)$$

Diese Definition erfüllt offensichtlich die homogenen Maxwell-Gleichungen (II) und (III). Setzt man sie in die inhomogenen Gleichungen ein, so erhält man Differentialgleichungen, für die Potentiale. Es bleiben dabei zwei Gleichungen zweiten Grades, statt vier Gleichungen ersten Grades übrig:

$$\vec{\nabla}^2 \varphi + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \vec{A} = -4\pi\rho \quad (11.1.3)$$

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = -\frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad (11.1.4)$$

Ebenso wie die Maxwell-Gleichungen sind auch diese DGLs gekoppelt. Die Potentiale sind aber nicht eindeutig und enthalten somit gewisse „Eichfreiheiten“, die genutzt werden können, um (11.1.3) und (11.1.4) zu entkoppeln. Dazu definiert man zunächst:

Definition 11.2 (Eichtransformationen)

$$\vec{A} \longrightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \text{grad } \chi \quad (11.1.5)$$

$$\varphi \longrightarrow \varphi' = \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t} \quad (11.1.6)$$

Dabei ist $\chi(\vec{r}, t)$ eine beliebige skalarwertige Funktion.

Setzt man solche mit einem beliebigen $\chi(\vec{r}, t)$ transformierte Potentiale in die Gleichungen (11.1.1) und (11.1.2) ein, so sieht man sofort, dass sie unabhängig von χ die selben Felder beschreiben. Zu jedem gegebenen EM-Feld \vec{E}, \vec{B} gibt es also eine ganze Klasse von Potentials, die dieses beschreiben. In der Elektrodynamik sind diese Potentiale nicht direkt messbar, sondern nur ihre Wirkung (Felder). Sie werden deswegen als „unphysikalisch“ angesehen und nur als mathematische Vereinfachung betrachtet, indem man die Funktion $\chi(\vec{r}, t)$ nutzt, um die Bestimmungsgleichungen zu vereinfachen. Man kann die Eichtransformationen weiter in Unterklassen unterteilen. Die beiden wichtigsten werden im Folgenden definiert und vorgestellt.

11.2. Coulomb-Eichung

Definition 11.3 (Coulomb-Eichung (transversale Eichung))

$$\operatorname{div} \vec{A} = 0 \quad (11.2.1)$$

Damit geht (11.1.4) direkt in die Poisson-Gleichung über:

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho \quad \Rightarrow \quad \varphi(\vec{r}, t) = \int_V \frac{\rho(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'$$

Aus dem Satz (Zerlegungssatz) folgt, dass man die Stromdichte \vec{j} folgendermaßen zerlegen kann:

$$\vec{j} = \vec{j}_l + \vec{j}_t = \operatorname{grad} \left(-\frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\operatorname{div} \vec{j}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' \right) + \operatorname{rot} \left(-\frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\operatorname{rot} \vec{j}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' \right)$$

Man kann nun die Lösung der Poisson-Gleichung mit der Kontinuitätsgleichung kombinieren und erhält so:

$$\varphi(\vec{r}, t) = \int_V \frac{\rho(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \varphi(\vec{r}, t)}{\partial t} = \int_V \frac{\frac{\partial \rho(\vec{r}', t)}{\partial t}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' \stackrel{\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div} \vec{j}}{=} - \int_V \frac{\operatorname{div} \vec{j}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'$$

Bildet man nun den Gradienten auf beiden Seiten dieser Gleichung, so ergibt sich im Vergleich mit dem Zerlegungssatz:

$$\operatorname{div} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 4\pi \vec{j}_l$$

Mit diesen Ergebnissen kann man nun auch 11.2 weiter umformen und die Bestimmungsgleichungen der Potentiale so entkoppeln:

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) - \frac{4\pi}{c} \vec{j} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}_l = \frac{4\pi}{c} \vec{j}_t$$

Man erhält also zusammenfassend:

Korollar 11.1 (Potentialgleichungen in Coulomb-Eichung) *In der Coulomb-Eichung entkoppeln die Potentialgleichungen zu:*

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho \quad (11.2.2)$$

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}_t \quad (11.2.3)$$

dabei ist \vec{j}_t die transversale Komponente der Stromdichte:

$$\vec{j}_t(\vec{r}, t) = \operatorname{rot} \left(-\frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\operatorname{rot} \vec{j}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' \right).$$

Dies erklärt auch den Namen transversale Eichung.

Es bleibt zum Schluss noch zu zeigen, dass eine solche Eichung tatsächlich existiert. Dazu berechnet man die explizite Form der Eichfunktion $\chi(\vec{r}, t)$:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}' = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \vec{\nabla}^2 \chi = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla}^2 \chi = -\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$$

Diese DGL. hat wieder die Form der Poisson-Gleichung. Man kann damit sofort ihre Lösung angeben:

$$\chi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\vec{\nabla}_{\vec{r}'} \cdot \vec{A}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' \quad (11.2.4)$$

11.3. Lorenz-Eichung

Definition 11.4 (Lorenz-Eichung)

$$\operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad (11.3.1)$$

In dieser Eichung sieht man sehr leicht, dass die Potentialgleichungen (11.1.3) und (11.1.4) in eine symmetrische Form übergehen:

Korollar 11.2 (Potentialgleichungen in Lorenz-Eichung) *In der Lorenz-Eichung entkoppeln die Potentialgleichungen in der einfachen, symmetrischen Form (inhomogene Wellengleichungen):*

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \varphi(\vec{r}, t) = -4\pi \rho(\vec{r}, t) \quad (11.3.2)$$

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{j}(\vec{r}, t) = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r}, t) \quad (11.3.3)$$

Nun soll noch die explizite Form der Eichfunktion $\chi(\vec{r}, t)$ berechnet werden, um auch für die Lorenz-Eichung zu zeigen, dass sie tatsächlich existiert:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}' + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi'}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \vec{\nabla}^2 \chi + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = 0$$

Daraus erhält man dann folgende inhomogene DGL für χ :

$$\left(\vec{\nabla}^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \chi = - \left(\operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)$$

Hierbei handelt es sich (bei gegebenem \vec{A}, φ) um eine inhomogene Wellengleichung. Ihre Lösung ist also nicht eindeutig, da man eine beliebige Lösung Λ der homogenen Wellengleichung

$$\left(\vec{\nabla}^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Lambda$$

zu jeder Lösung χ addieren kann. Es existiert aber eine Lösung für χ , was für den Beweis der Existenz der Lorenz-Eichung genügt. Aufgrund der Struktur der Eichtransformation kann man die Lorenz-Eichung immer so ausführen, dass $\varphi(\vec{r}, t) = 0$ gilt.

11.4. Lösung der Potentialgleichungen, Retardierte Potentiale

Mit der Lorenz-Eichung wurde die Lösung der Maxwell-Gleichungen auf die Lösung von inhomogenen Wellengleichungen zurückgeführt. Diese wurde aus mathematischer Sicht in Abschnitt 6 besprochen. Dort ergibt sich die Lösung einer inhomogenen Wellengleichung als Summe aus der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung und einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung. Da man hier nur an reellen Größen (physikalisch sinnvolle Observable) interessiert ist, benutzt man den Ausdruck (6.1.6) für die allgemeine Lösung der homogenen DGL:

Korollar 11.3 (Lösung der homogenen Potentialgleichung)

$$\varphi_{hom}(\vec{r}, t) = \int d^3k \int d\omega \tilde{\varphi}(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega(\vec{k})t)} \quad (11.4.1)$$

$$\vec{A}_{hom}(\vec{r}, t) = \int d^3k \int d\omega \tilde{\vec{A}}(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega(\vec{k})t)} \quad (11.4.2)$$

Die Fourier-Koeffizienten $\tilde{\varphi}(\vec{k})$ und $\tilde{\vec{A}}(\vec{k})$ bestimmen sich dabei aus den Anfangsbedingungen und der Lorenz-Eichung (11.3.1).

Außerdem erhält man für die Green-Funktion der inhomogenen Lösung folgendes Ergebnis:

$$G(\vec{r}, t, \vec{r}', t') = \frac{1}{|\Delta\vec{r}|} \left[\delta \left(\Delta t - \frac{|\Delta\vec{r}|}{c} \right) - \delta \left(\Delta t + \frac{|\Delta\vec{r}|}{c} \right) \right], \quad \Delta t = t - t', \quad \Delta\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}'$$

Die zweite δ -Funktion in diesem Term kann nur für $\Delta t = t - t' < 0$, einen Beitrag liefern. Dies macht aber physikalisch keinen Sinn, da es bedeuten würde, dass $t' > t$, also der Zustand zum Zeitpunkt t von einem Ereignis beeinflusst wird, dass sich zu einem späteren Zeitpunkt t' ereignet. Dies widerspricht dem Kausalitätsgebot der Physik. Man behält also nur die erste δ -Funktion bei und benutzt folgende „retardierte“ Green-Funktion:

$$G(\vec{r}, t, \vec{r}', t') = \frac{\delta \left(t' - t + \frac{|\Delta\vec{r}|}{c} \right)}{|\Delta\vec{r}|}$$

Hierbei wurde das Vorzeichen des Argumentes der δ -Funktion umgekehrt. Dies macht aufgrund der Symmetrie der δ -Funktion keinen Unterschied. Man erhält dann die folgenden speziellen Lösungen der inhomogenen Potentialgleichungen:

Korollar 11.4 (Lösung der inhomogenen Potentialgleichung, retardierte Potentiale)

$$\varphi_{\text{ret}}(\vec{r}, t) = \int d^3r' \int dt' \frac{\rho(\vec{r}', t')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \cdot \delta(t' - t_{\text{ret}}) = \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}', t_{\text{ret}})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (11.4.3)$$

$$\vec{A}_{\text{ret}}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \int d^3r' \int dt' \frac{\vec{j}(\vec{r}', t')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \cdot \delta(t' - t_{\text{ret}}) = \frac{1}{c} \int d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}', t_{\text{ret}})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (11.4.4)$$

Dabei ist

$$t_{\text{ret}} = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}$$

die retardierte Zeit; das ist die Zeit, zu der sich eine Störung im Abstand $|\vec{r} - \vec{r}'|$ ereignet hat, die sich mit Lichtgeschwindigkeit c ausbreitet.

Die Randbedingungen bei der Lösung der Potentialgleichungen mit Hilfe der retardierten Potentiale können über die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung eingebracht werden, indem man eine entsprechende Lösung der homogenen Gleichung zu den retardierten Potentialen des Systems addiert.

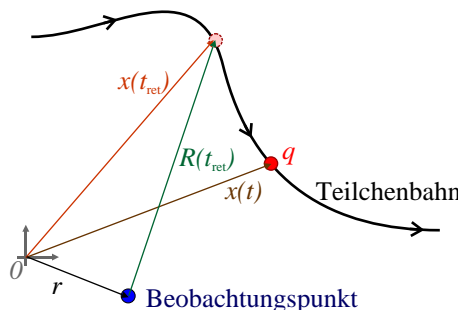


Abb. 11.1.: zur Definition des retardierten Abstandes

Zur Erläuterung der retardierten Größen betrachte man Abb. 11.1. Das Teilchen befindet sich momentan an der Position $\vec{x}(t)$ und löst dort eine Störung aus (Potential!). Diese Störung kann sich aber maximal mit Lichtgeschwindigkeit c ausbreiten, sodass sie am Beobachtungspunkt \vec{r} noch nicht zu beobachten ist. Dort sind dafür aber die ersten Ausläufer der Störung zum Zeitpunkt t_{ret} zu beobachten, an dem sich das Teilchen am Ort $\vec{x}(t_{\text{ret}})$ befand. Dieser retardierte Ort läuft dem aktuellen Ort also auf der Teilchenbahn nach.

12. Strahlungstheorie

12.1. Liénard-Wiechert-Potentiale

In diesem Abschnitt betrachtet man eine Punktladung q , die sich auf einer beliebigen Bahn $\vec{r}_0(t)$ mit der Geschwindigkeit $\dot{\vec{r}}_0(t)$ bewegt. Zunächst soll ein allgemeines Ergebnis über die δ -Funktion vorausgeschickt werden: Hat eine Funktion $f(x)$ N Nullstellen x_1, \dots, x_N , so gilt für eine beliebige Funktion $g(x)$:

$$\int g(x') \delta[f(x')] dx' = \sum_{k=1}^N N \frac{g(x_k)}{f'(x_k)} \quad (12.1.1)$$

Dabei ist $f'(x_k)$ der Wert der ersten Ableitung von $f(x)$ an der Stelle x_k .

Nun zurück zu der bewegten Ladung. Mit Hilfe der δ -Funktion kann man die Ladungs- und Stromdichte aufstellen:

$$\rho(\vec{r}, t) = q \cdot \delta[\vec{r} - \vec{r}_0(t)] \quad \vec{j}(\vec{r}, t) = q \dot{\vec{x}}_0(t) \cdot \delta[\vec{r} - \vec{r}_0(t)] \quad (12.1.2)$$

Diese Ausdrücke kann man nun in die retardierten Potentiale (11.4.3) und (11.4.4) einsetzen und erhält (beispielsweise für φ):

$$\varphi_{\text{ret}}(\vec{r}, t) = \int d^3r' \int dt' \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \cdot \delta[\vec{r}' - \vec{r}_0(t')] \cdot \delta \left[t' - t + \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c} \right]$$

Die Ortsintegration lässt sich aufgrund der ersten δ -Funktion leicht ausführen und man erhält:

$$\varphi_{\text{ret}}(\vec{r}, t) = \int dt' \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}_0(t')|} \cdot \delta \left[t' - t + \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0(t')|}{c} \right]$$

Bei der zeitlichen Integration ist zu beachten, dass das Argument der δ -Funktion eine Funktion der Integrationsvariable t' ist. Man muss deswegen (12.1.1) anwenden. Das Argument der δ -Funktion verschwindet nur zur retardierten Zeit $t_{\text{ret}} = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0(t')|}{c}$. Zunächst muss man die Ableitung des Argumentes der δ -Funktion berechnen:

$$\begin{aligned} f(t') &:= t' - t + \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0(t')|}{c} \\ \Rightarrow f'(t') &= 1 + \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{2|\vec{r} - \vec{r}_0(t')|} \cdot 2[(r_1 - r_{01}(t'))\dot{r}_{01} + (r_2 - r_{02}(t'))\dot{r}_{02} + (r_3 - r_{03}(t'))\dot{r}_{03}] = \\ &= 1 + \frac{1}{c} \cdot \frac{(\vec{r} - \vec{r}_0(t')) \cdot \dot{\vec{r}}_0(t')}{|\vec{r} - \vec{r}_0(t')|} = 1 + \frac{1}{c} \cdot \frac{\vec{R}(t') \cdot \dot{\vec{R}}_0(t')}{R(t')} \end{aligned}$$

Nun kann man zusammen mit (12.1.1) die Integration ausführen und erhält:

Satz 12.1 (Liénard-Wiechert-Potentiale) Die retardierten Potentiale einer Punktladung q , die sich auf einer beliebigen Bahnkurve $\vec{x}(t)$ mit der Geschwindigkeit $\vec{v}(t) = \dot{\vec{x}}(t)$ bewegt, sind durch die **Liénard-Wiechert-Potentiale**

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{q}{R(t_{\text{ret}}) - \frac{1}{c} \vec{R}(t_{\text{ret}}) \cdot \vec{v}(t_{\text{ret}})} \quad (12.1.3)$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \cdot \frac{q \vec{v}(t_{\text{ret}})}{R(t_{\text{ret}}) - \frac{1}{c} \vec{R}(t_{\text{ret}}) \cdot \vec{v}(t_{\text{ret}})} \quad (12.1.4)$$

gegeben. Dabei ist

$$\vec{R}(t_{\text{ret}}) = \vec{r} - \vec{x}(t_{\text{ret}}), \quad R(t_{\text{ret}}) = |\vec{R}(t_{\text{ret}})|$$

der Abstand des Beobachtungspunktes \vec{r} zum Teilchenort $\vec{x}(t_{\text{ret}})$ zur retardierten Zeit

$$t_{\text{ret}} = t - \frac{|\vec{r} - \vec{x}(t_{\text{ret}})|}{c} = t - \frac{R(t_{\text{ret}})}{c}$$

Diese Potentiale beschreiben also die Felder, die von einer bewegten Ladung im ladungs- und stromfreien Raum erzeugt werden.

Nun kann man sich daran machen die Felder aus den Potentialen zu berechnen. Dazu verwendet man

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \text{und} \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}.$$

Für die Rechnung wird es nötig sein die Ableitungen $\frac{\partial t_{\text{ret}}}{\partial t}$ und $\vec{\nabla} t_{\text{ret}}$ zu berechnen. Dies soll nun zuerst geschehen. Man betrachtet zunächst

$$\frac{\partial \vec{R}^2}{\partial t_{\text{ret}}} = 2\vec{R} \frac{\partial \vec{R}}{\partial t_{\text{ret}}} = 2R \frac{\partial R}{\partial t_{\text{ret}}} = -2\vec{R}\vec{v} \quad (12.1.5)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial R}{\partial t} = \frac{\partial R}{\partial t_{\text{ret}}} \frac{\partial t_{\text{ret}}}{\partial t} = -\frac{\vec{R} \cdot \vec{v}}{R} \cdot \frac{\partial t_{\text{ret}}}{\partial t} \quad (12.1.6)$$

Außerdem gilt:

$$R(t_{\text{ret}}) = c \cdot (t - t_{\text{ret}}) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial R}{\partial t} = c \cdot \left(1 - \frac{\partial t_{\text{ret}}}{\partial t}\right) \quad (12.1.7)$$

Nun kann man (12.1.6) und (12.1.7) gleichsetzen und erhält:

$$1 - \frac{\partial t_{\text{ret}}}{\partial t} = -\frac{\vec{R}}{R} \cdot \frac{\vec{v}}{c} \cdot \frac{\partial t_{\text{ret}}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad 1 = (1 - \frac{\vec{R} \cdot \vec{v}}{cR}) \cdot \frac{\partial t_{\text{ret}}}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial t_{\text{ret}}}{\partial t} = \frac{1}{1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}} \quad \text{wobei} \quad \vec{R} = R \cdot \vec{n} \quad \text{und} \quad \vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c} \quad (12.1.8)$$

Nun betrachtet man noch die Gradiententerme:

$$\vec{\nabla} R = \vec{\nabla} c(t - t_{\text{ret}}) = -c \vec{\nabla} t_{\text{ret}} \quad \vec{\nabla} R = \vec{\nabla} |\vec{r} - \vec{x}(t_{\text{ret}})| = \frac{\vec{R}}{R} + \frac{\partial \vec{R}}{\partial t_{\text{ret}}} \vec{\nabla} t_{\text{ret}} = \vec{n} - (\vec{n} \cdot \vec{v}) \vec{\nabla} t_{\text{ret}}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} t_{\text{ret}} = \frac{1}{c} \frac{\vec{n}}{\vec{n} \cdot \vec{\beta} - 1} \quad (12.1.9)$$

Nach einiger Rechnung erhält man die folgende Darstellung der Felder:

Korollar 12.1 (Felder einer beliebig bewegten Punktladung) Die Felder, die sich aus den Liénard-Wiechert-Potentiale ergeben lauten:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0(\vec{r}, t) + \vec{E}_a(\vec{r}, t) = q \cdot \left[\frac{(\vec{n} - \vec{\beta})(1 - \beta^2)}{R^2(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta})^3} \right]_{t_{\text{ret}}} + q \cdot \left[\frac{\vec{n} \times [(\vec{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}]}{R(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta})^3} \right]_{t_{\text{ret}}} \quad (12.1.10)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0(\vec{r}, t) + \vec{B}_a(\vec{r}, t) = \vec{n} \times \vec{E} = \vec{n} \times \vec{E}_0(\vec{r}, t) + \vec{n} \times \vec{E}_a(\vec{r}, t) \quad (12.1.11)$$

Dabei hängen die Terme mit Index 0 nicht von der Beschleunigung $\dot{\vec{\beta}}$ der Ladung ab. Die gesamte Beschleunigungsabhängigkeit steckt somit in den Termen mit Index a. Es ist zu beachten, dass das magnetische Feld sowohl auf \vec{E} , als auch auf \vec{n} , also dem Verbindungsvektor zwischen Beobachtersposition und retardierter Teilchenposition senkrecht steht.

12.2. Beispiel: Ruhende Punktladung

Für eine ruhende Punktladung $\vec{v} = 0$ im Ursprung $\vec{x} = 0$ ergibt sich das elektrische Potential:

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{q}{R(t_{\text{ret}}) - \frac{1}{c} \vec{R}(t_{\text{ret}}) \cdot \vec{v}(t_{\text{ret}})} = \frac{q}{R(t_{\text{ret}})} = \frac{q}{|\vec{r}|}$$

Dies ist gerade wieder das elektrostatische einer Punktladung. Das magnetische Vektorpotential ist

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = 0,$$

was auch mit dem elektrostatischen Fall übereinstimmt.

12.3. Beispiel: gleichförmig bewegte Punktladung

Nun betrachtet man eine Punktladung, die sich mit der Geschwindigkeit $v > 0$ entlang der x -Achse bewegt. Es gilt dann:

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} vt \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\beta} = \begin{pmatrix} v/c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Als Beobachtungspunkt wählt man $\vec{r} = 0$ den Ursprung. Es gilt dann:

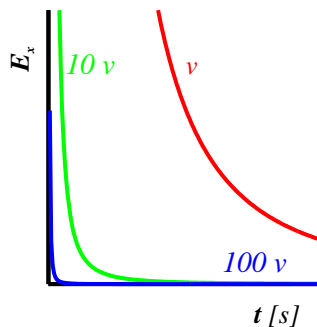
$$R(t_{\text{ret}}) = v \cdot t_{\text{ret}} \quad \text{mit} \quad t_{\text{ret}} = t - \frac{R(t_{\text{ret}})}{c} = t - \frac{v \cdot t_{\text{ret}}}{c} \Rightarrow t_{\text{ret}} = \frac{t}{1 + \frac{v}{c}} = \frac{t}{1 + \beta}$$

Man setzt nun diese Ergebnisse in (12.1.10) und (12.1.11) ein. Dabei bleiben werden die beschleunigungsabhängigen Teile sofort 0, weil \vec{n} , $\vec{\beta}$ und $\dot{\vec{\beta}}$ alle parallel zu \vec{e}_x sind. Man erhält also mit $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$:

$$\vec{E} = q \cdot \left[\frac{(\vec{n} - \vec{\beta})(1 - \beta^2)}{R^2(1 - \vec{n}\vec{\beta})^3} \right]_{t_{\text{ret}}} = q \cdot \frac{\begin{pmatrix} -1 - \beta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot (1 - \beta^2)}{v^2 t_{\text{ret}}^2 (1 + \beta)^3} = -q \cdot \frac{1}{\gamma^2 v^2 t_{\text{ret}}^2 (1 + \beta)^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -q \cdot \frac{1}{\gamma^2 v^2 t^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{B} = \vec{n} \times \vec{E} = 0$$

In der folgende Abbildung sieht man wie das elektrische Feld im Ursprung abklingt. Je größer die Geschwindigkeit, desto schneller klingt es ab.



12.4. Strahlungsleistung

Hier soll nun die von einer bewegten Ladung abgestrahlte Leistung P berechnet werden. Dazu setzt man voraus, dass alle Größen zur retardierten Zeit genommen werden ($\vec{R} \equiv \vec{R}(t_{\text{ret}})$ usw.). Dies macht Sinn, da sich die Strahlung nur mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten kann. Zunächst betrachtet man Abb. 12.1.

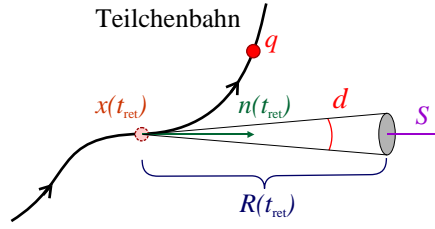


Abb. 12.1.: Zur Strahlungsleistung bei retardierten Potentialen

Der Beobachtungspunkt befinde sich in der Mitte der grau eingezeichneten Fläche. Der Vektor $\vec{n} = \vec{R}/R$ zeigt von der retardierten Position der Ladung zum Beobachter. Die graue Fläche hat den Flächeninhalt $R^2 d\Omega$. Der Energiestrom des Feldes, das durch die Ladung erzeugt wird ist durch den Poynting-Vektor $\vec{S} = \frac{c}{4\pi}(\vec{E} \times \vec{B})$ gegeben. Der Anteil des Energiestromes (Energie/(Zeit·Fläche)), der die Fläche tatsächlich passiert ist dann $\vec{S} \cdot \vec{n}$. Steht der Strom nämlich senkrecht zur Fläche, so passiert überhaupt keine Energie das Flächenelement. Man erhält dann für die Leistung (Energie/Zeit):

$$dP = (\vec{S} \cdot \vec{n}) \cdot R^2 d\Omega \Rightarrow \frac{dP}{d\Omega} = \frac{dE}{dt d\Omega} = r^2 \vec{S} \cdot \vec{n} = \frac{cR^2}{4\pi} \vec{n} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}). \quad (12.4.1)$$

Bei der Berechnung von $\vec{S} \propto \vec{E} \times \vec{B}$ mit den retardierten Feldern (12.1.10) und (12.1.11) erkennt man, dass sich Terme der Ordnung $\mathcal{O}(R^{-2})$, $\mathcal{O}(R^{-3})$, $\mathcal{O}(R^{-4})$ ergeben:

$$\vec{E} \times \vec{B} = (\underbrace{\vec{E}_0}_{\propto 1/R^2} + \underbrace{\vec{E}_a}_{\propto 1/R}) \times (\underbrace{\vec{B}_0}_{\propto 1/R^2} + \underbrace{\vec{B}_a}_{\propto 1/R}) = \underbrace{\vec{E}_0 \times \vec{B}_0}_{\propto 1/R^4} + \underbrace{\vec{E}_0 \times \vec{B}_a + \vec{E}_a \times \vec{B}_0}_{\propto 1/R^3} + \underbrace{\vec{E}_a \times \vec{B}_a}_{1/R^2}$$

Man betrachtet nun nur das Fernfeld, sodass man alle Terme $\mathcal{O}(R^{-3})$ und $\mathcal{O}(R^{-4})$ vernachlässigen kann, da sie mit R schnell gegen 0 sinken. Es bleibt also $\vec{E} \times \vec{B} \propto \vec{E}_a \times \vec{B}_a$ übrig. Dies ergibt:

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2}{4\pi c} \frac{(\vec{n} \times [(\vec{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}])^2}{(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta})^6} \quad (12.4.2)$$

An dieser Formel sieht man schon, dass nur beschleunigte Ladungen Energie abstrahlen (Abhängigkeit von $\dot{\vec{\beta}}$). Vom Standpunkt der Ladung aus, kann man sich fragen, wieviel Energie $\frac{dP'}{d\Omega}$ im Zeitintervall δt_{ret} abgestrahlt wurde. Da (12.4.2) die Abstrahlung im Intervall δt angibt erhält man somit:

$$\frac{dP'}{d\Omega} = \frac{\partial t}{\partial t_{\text{ret}}} \cdot \frac{dP}{d\Omega} = \left(\frac{\partial t_{\text{ret}}}{\partial t} \right)^{-1} \cdot \frac{dP}{d\Omega} \stackrel{(12.1.8)}{=} \frac{q^2}{4\pi c} \frac{(\vec{n} \times [(\vec{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}])^2}{(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta})^5} \quad (12.4.3)$$

Nun kann man zwei Grenzfälle betrachten:

1. **nichtrelativistischer Grenzfall** $\beta \ll 1$: In diesem Fall erhält man aus (12.4.3) mit $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$:

$$\begin{aligned} \frac{dP'}{d\Omega} &= \frac{q^2}{4\pi c} (\vec{n} \times [\vec{n} \times \dot{\vec{\beta}}])^2 = \frac{q^2}{4\pi c} (\vec{n}(\vec{n} \cdot \dot{\vec{\beta}}) - \underbrace{\dot{\vec{\beta}} \vec{n}^2}_{=1})^2 = \frac{q^2}{4\pi c} (\vec{n}(\beta \cos \theta) - \dot{\vec{\beta}})^2 = \\ &= \frac{q^2}{4\pi c} (\beta^2 \cos^2 \theta - 2\dot{\vec{\beta}} \cos \theta + \dot{\vec{\beta}}^2) = \frac{q^2}{4\pi c} \dot{\vec{\beta}}^2 (1 - \cos^2 \theta) = \frac{q^2}{4\pi c} \dot{\vec{\beta}}^2 \sin^2 \theta \end{aligned}$$

Dabei wurde der Winkel $\cos \theta \frac{\vec{n} \cdot \dot{\vec{\beta}}}{\dot{\vec{\beta}}}$ zwischen Teilchenbeschleunigung $\dot{\vec{\beta}}$ und der Beobachtungsrichtung \vec{n} eingeführt. Die folgende Abb. 12.2 zeigt die Richtungsabhängigkeit der Strahlung. Man kann nun über den Raum $d\Omega$ integrieren und erhält so die gesamte abgestrahlte Leistung:

$$P = \int \frac{\partial P'}{\partial \Omega} d\Omega = \frac{q^2}{4\pi c} \dot{\vec{\beta}}^2 \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} \sin^2(\theta) \cdot \sin(\theta) d\theta d\phi = \frac{2\pi \cdot q^2}{4\pi c} \dot{\vec{\beta}}^2 \left[\frac{\cos \theta}{3} - \cos \theta \right]_0^{\pi} = \frac{2q^2}{3c} \dot{\vec{\beta}}^2$$

Man erhält also insgesamt:

Korollar 12.2 (Abstrahlung einer nicht-relativistischen Ladung) Eine nicht-relativistische ($\beta \ll 1$) Ladung q , die mit $\vec{\beta}$ beschleunigt wird, strahlt die folgende Leistung ab:

$$\frac{dP'}{d\Omega} = \frac{q^2}{4\pi c} \dot{\beta}^2 \sin^2 \theta \quad P = \frac{2q^2}{3c} \dot{\beta}^2 \quad (12.4.4)$$

Die zweite Beziehung wird als **Lamor'sche Formel** bezeichnet. Dabei ist $\cos \theta = \frac{\vec{n} \cdot \vec{\beta}}{\beta}$ der Winkel zwischen Beobachtungspunkt und Beschleunigung. Die Winkelabhängigkeit ist in Abb. 12.2 dargestellt.

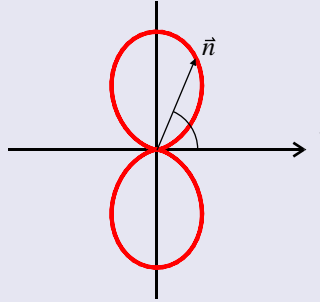


Abb. 12.2.: Richtungsabhängigkeit der Abstrahlung einer nicht-relativistischen, beschleunigten Ladung

2. **Grenzfall $\vec{\beta} \parallel \dot{\vec{\beta}}$:** Hier ist also θ nach obiger Definition der Winkel zwischen der Beobachtungsrichtung \vec{n} und der Beschleunigung $\dot{\vec{\beta}}$, sowie der Geschwindigkeit $\vec{\beta}$. Die Ladung wird also geradlinig beschleunigt. Man erhält dann aus (12.4.3):

Korollar 12.3 (Abstrahlung einer relativistischen Ladung) Eine relativistische Ladung q mit $\vec{\beta} \parallel \dot{\vec{\beta}}$, die mit $\dot{\vec{\beta}}$ in Richtung ihrer Bewegung beschleunigt wird, strahlt die folgende Leistung ab:

$$\frac{dP'}{d\Omega} = \frac{q^2}{4\pi c} \dot{\beta}^2 \frac{\sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^5} \quad (12.4.5)$$

Die Winkelabhängigkeit ist in Abb. 12.3 dargestellt. Die Abstrahlung erfolgt also in Form eines Kegels in Bewegungsrichtung des Ladung.

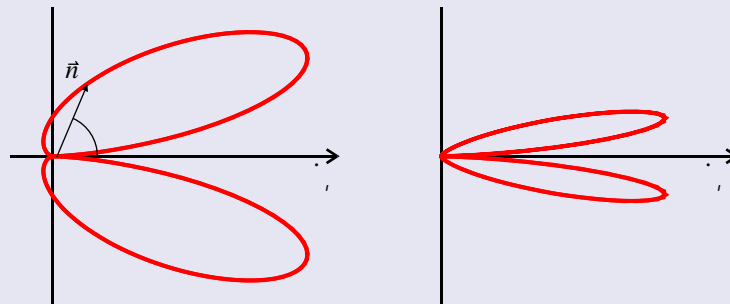
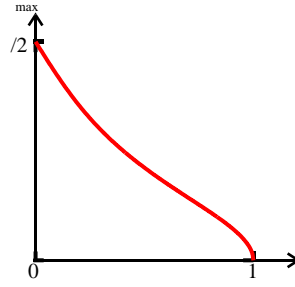


Abb. 12.3.: Richtungsabhängigkeit der Abstrahlung einer relativistischen, beschleunigten Ladung, links mit $\beta = 0.5$, rechts mit $\beta = 0.81$

Aus Abb. 12.3 kann man ersehen, dass der Abstrahlkegel mit steigender Geschwindigkeit β immer schmaler wird und nach vorne gerichtet ist. Man kann den Winkel der maximalen Abstrahlung bestimmen:

$$\frac{d}{d \cos \theta} \frac{\partial P'}{\partial \Omega} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \cos \theta_{\max} = \frac{1}{3\beta} \left(\sqrt{15\beta^2 + 1} - 1 \right)$$

Die Funktion $\theta_{\max}(\beta)$ ist in der folgenden Abb. 12.4 dargestellt. Dies bestätigt das obige qualitative Ergebnis.

Abb. 12.4.: Winkel der maximalen Abstrahlung θ_{\max} als Funktion der Geschwindigkeit β

12.5. Dipolstrahlung

Hier werden zeitlich oszillierende Ladungs- und Stromverteilungen diskutiert. Es gilt also:

$$\rho(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r})e^{-i\omega t} \quad \vec{j}(\vec{r}, t) = \vec{j}(\vec{r})e^{-i\omega t} \quad (12.5.1)$$

Diese Verteilungen sollen auf einen Raumbereich mit Radius R_0 um den Ursprung beschränkt sein. Außerhalb sind keine Ladungen und Ströme vorhanden. Um beliebige oszillierende Verteilungen darzustellen kann man (12.5.1) als Fourier-Komponente interpretieren und dann über ω mit einem Gewichtungsfaktor $f(\omega)$ integrieren (Fourier-Trafo). Es bleibt noch zu bemerken, dass sich die physikalischen Größen aus (12.5.1) über die Bildung des Realteiles ergeben. Die komplexen Größen wurden hier nur eingeführt, da man mit ihnen leichter rechnen kann. Zunächst berechnet man das Vektorpotential mit Hilfe des retardierten Potential (11.4.4) und der retardierten Zeit $t_{\text{ret}} = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}$ und $k := \frac{\omega}{c}$:

$$\vec{A}_{\text{ret}}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \int d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}') \cdot e^{t_{\text{ret}}}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{e^{-i\omega t}}{c} \cdot \int d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}') \cdot e^{ik|\vec{r} - \vec{r}'|}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \vec{A}_{\text{ret}}(\vec{r}) \cdot e^{-i\omega t} \quad (12.5.2)$$

Mit dieser Form für das Vektorpotential kann man (IV) sowie die Definition der Potential (11.1.1) und (11.1.2) nutzen, um Aussagen über die \vec{E} und \vec{B} -Felder zu machen. Für das \vec{B} -Feld gilt:

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{A}_{\text{ret}}(\vec{r})}_{=: \vec{B}(\vec{r})} \cdot e^{-i\omega t} = \vec{B}(\vec{r}) \cdot e^{-i\omega t} \quad (12.5.3)$$

Für das \vec{E} -Feld erhält man aus (IV) im Bereich $\lambda, |\vec{r}| > R_0$ (dort ist $\vec{j} = 0$, außerdem ist $\lambda = 2\pi/k$):

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = c \cdot \int \vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}) \cdot e^{-i\omega t} dt = \frac{c}{-i\omega} \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{i}{k} \vec{\nabla} \times \vec{B}. \quad (12.5.4)$$

Es genügt also das Vektorpotential, um die \vec{E} - und \vec{B} -Felder zu berechnen. Betrachtet man nun nur das **Fernfeld** der Strahlungsquelle, als $|\vec{r}| \gg R_0$, so kann man in (12.5.2) der Ausdruck $\frac{\vec{j}(\vec{r}') \cdot e^{t_{\text{ret}}}}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$ entwickeln ($\sqrt{1 \pm x} = 1 \pm \frac{1}{2}x$):

$$\begin{aligned} |\vec{r} - \vec{r}'| &= \sqrt{(\vec{r} - \vec{r}')^2} = \sqrt{\vec{r}^2 - 2\vec{r}\vec{r}' + \vec{r}'^2} = |\vec{r}| \cdot \left(1 + \frac{\vec{r}'^2}{\vec{r}^2} - 2\frac{\vec{r}\vec{r}'}{\vec{r}^2}\right)^{1/2} \approx |\vec{r}| \cdot \left(1 - 2\frac{\vec{r}\vec{r}'}{\vec{r}^2}\right)^{1/2} \approx \\ &\approx |\vec{r}| \cdot \left(1 - \frac{\vec{r}\vec{r}'}{\vec{r}^2}\right) = |\vec{r}| \cdot \frac{\left(1 - \frac{\vec{r}\vec{r}'}{\vec{r}^2}\right)\left(1 + \frac{\vec{r}\vec{r}'}{\vec{r}^2}\right)}{\left(1 + \frac{\vec{r}\vec{r}'}{\vec{r}^2}\right)} = |\vec{r}| \cdot \frac{1 - \left(\frac{\vec{r}\vec{r}'}{\vec{r}^2}\right)^2}{\left(1 + \frac{\vec{r}\vec{r}'}{\vec{r}^2}\right)} \approx |\vec{r}| \left(1 + \frac{\vec{r}\vec{r}'}{\vec{r}^2}\right)^{-1} \end{aligned} \quad (12.5.5)$$

$$\Rightarrow \frac{e^{ik|\vec{r} - \vec{r}'|}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \approx \frac{e^{ik|\vec{r}|} e^{-ik\vec{r}\vec{r}'/|\vec{r}|}}{|\vec{r}|} \left(1 + \frac{\vec{r}\vec{r}'}{\vec{r}^2}\right) \approx \frac{e^{ikr}}{r} \cdot e^{-ik\vec{n}\vec{r}'}, \quad r = |\vec{r}|, \quad \vec{n} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \quad (12.5.6)$$

Da auch $k = \frac{2\pi}{\lambda} \ll \frac{2\pi}{R_0}$ gilt, kann man die Exponentialfunktion entwickeln:

$$e^{ik\vec{n}\vec{r}'} \approx 1 - ik\vec{n}\vec{r}' \approx 1$$

Berücksichtigt man all diese Näherungen, so bleibt von (12.5.2):

$$\vec{A}_{\text{ret}}(\vec{r}, t) = \frac{e^{-i\omega t}}{c} \cdot \int d^3 r' \frac{\vec{j}(\vec{r}') \cdot e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \approx \frac{e^{-i\omega t}}{c} \cdot \frac{e^{ikr}}{r} \cdot \int \vec{j}(\vec{r}') d^3 r' \quad (12.5.7)$$

Es bleibt also noch das Volumenintegral $\int \vec{j}(\vec{r}') d^3 r'$ zu berechnen. Dazu nutzt man die Kontinuitätsgleichung:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \Rightarrow \vec{\nabla} \vec{j}(\vec{r}, t) = i\omega \rho(\vec{r}) \quad (12.5.8)$$

Nutzt man außerdem noch $[\vec{j}(\vec{r}') \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}'}] \vec{r}' = \vec{j}$ und damit auch $\vec{\nabla}_{\vec{r}'} \vec{j}(\vec{r}') = \vec{\nabla}_{\vec{r}'} [\vec{j}(\vec{r}') \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}'}] \vec{r}' = \vec{r}' [\vec{\nabla}_{\vec{r}'} \cdot \vec{j}(\vec{r}')]$, so erhält man dann:

$$\int d^3 r' \vec{j}(\vec{r}') = \int d^3 r' [\vec{j}(\vec{r}') \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}'}] \vec{r}' = \int d^3 r' \vec{r}' [\vec{\nabla}_{\vec{r}'} \cdot \vec{j}(\vec{r}')] = -i\omega \int d^3 r' \vec{r}' \rho(\vec{r}')$$

Hierin kann man das elektrische Dipolmoment \vec{p} identifizieren:

$$\vec{p}(\vec{r}) = \int d^3 r' \vec{r}' \rho(\vec{r}') \Rightarrow \vec{p}(t) = \int d^3 r' \vec{r}' \rho(\vec{r}') e^{-i\omega t} \quad (12.5.9)$$

Damit erhält man dann:

$$\vec{A}_{\text{ret}}(\vec{r}, t) = -ik\vec{p}(t) \cdot \frac{e^{ikr}}{r} = -ik\vec{p} \cdot \frac{e^{ikr}}{r} \cdot e^{-i\omega t} \quad (12.5.10)$$

Das Vektorpotential ist also eine Kugelwelle, die sich vom Ursprung (Ladungsverteilung) aus ausbreitet. Die Wellenzahl $k = \omega/c$ dieser Kugelwelle ist durch die Schwingungsfrequenz ω der Ladungsverteilung gegeben. Mit $\vec{\nabla} \times (\vec{a}\varphi) = \varphi \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{a}) - \vec{a} \times (\vec{\nabla}\varphi)$ (siehe (3.4.5)) kann man dann $\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{\nabla} \times \vec{A}_{\text{ret}}(\vec{r})$ das magnetische Feld berechnen:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} \times \left(-ik\vec{p} \cdot \frac{e^{ikr}}{r} \right) = \frac{e^{ikr}}{r} ik \underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{p}}_{=0} + ik\vec{p} \times \left[\vec{\nabla} \frac{e^{ikr}}{r} \right] = \dots = \frac{e^{ikr}}{r} k^2 \left(1 - \frac{1}{ikr} \right) (\vec{n} \times \vec{p})$$

Daraus kann man dann auch noch das \vec{E} -Feld berechnen (siehe Standardliteratur). Insgesamt ergibt sich dann:

Satz 12.2 (Felder einer zeitlich oszillierenden Ladungs- und Stromverteilung) Gegeben sei eine Ladungs- und Stromverteilung, die sich auf ein Raumgebiet $|\vec{r}| < R_0$ beschränkt. Diese habe die explizite Form:

$$\rho(\vec{r}, t) = \text{Re} \{ \rho(\vec{r}) e^{-i\omega t} \} \quad \vec{j}(\vec{r}, t) = \text{Re} \{ \vec{j}(\vec{r}) e^{-i\omega t} \}$$

Für $|\vec{r}| \gg R_0$ (also im **Fernfeld**) ergeben sich die \vec{E} - und \vec{B} -Felder zu:

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \text{Re} \{ \vec{B}(\vec{r}) e^{-i\omega t} \} \quad \vec{E}(\vec{r}, t) = \text{Re} \{ \vec{E}(\vec{r}) e^{-i\omega t} \}.$$

Dabei sind:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{e^{ikr}}{r} k^2 \left(1 - \frac{1}{ikr} \right) (\vec{n} \times \vec{p}) \quad (12.5.11)$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{e^{ikr}}{r} \left\{ k^2 [(\vec{n} \times \vec{p}) \times \vec{n}] + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{r} - ik \right) [3\vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{p}) - \vec{p}] \right\} \quad (12.5.12)$$

Dabei sind weiter:

$$\vec{r} = r \cdot \vec{n} \quad \vec{p} = \int \vec{r}' \rho(\vec{r}') d^3 r'$$

Hier bezeichnet also $\vec{p}(t) = \vec{p} e^{i\omega t}$ das zeitlich oszillierende Dipolmoment der Ladungsverteilung.

Man kann nun wieder zwei Spezialfälle unterscheiden:

1. **Fernfeld** ($R_0 \ll \lambda \ll |\vec{r}|$): Hier wird dann $1/(ikr) \approx 0$ und man erhält aus (12.5.11) und (12.5.12):

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{e^{ikr}}{r} k^2 (\vec{n} \times \vec{p}) \quad \vec{E}(\vec{r}) = \frac{e^{ikr}}{r} k^2 (\vec{n} \times \vec{p}) \times \vec{n} = \vec{B}(\vec{r}, t) \times \vec{n}$$

Man erkennt daran, dass die Drei Größen \vec{E} , \vec{B} und \vec{n} senkrecht aufeinander stehen. Man kann auch noch die (zeitgemittelte) Abstrahlung (Pointing-Vektor) berechnen:

$$\begin{aligned} \bar{\vec{S}} &= \frac{c}{8\pi} \text{Re} \{ \vec{E} \times \vec{B}^* \} = \frac{ck^4}{8\pi r^2} \text{Re} \{ (\vec{n} \times \vec{p}) \times \vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{p}^*) \} = \\ &= \frac{ck^4}{8\pi r^2} \text{Re} \{ \vec{n} [(\vec{n} \times \vec{p}) \cdot (\vec{n} \times \vec{p}^*)] - (\vec{n} \times \vec{p}^*) \underbrace{[\vec{n}(\vec{n} \times \vec{p})]}_{=0} \} = \frac{ck^4}{8\pi r^2} \vec{n} \cdot \text{Re} \{ (\vec{n} \times \vec{p}) \cdot (\vec{n} \times \vec{p}^*) \} \propto \vec{n} \end{aligned} \quad (12.5.13)$$

Man kann also \vec{n} als Ausbreitungsrichtung der Welle betrachten, d.h. die Energie fließt radial nach außen. Für das Vektorprodukt $\vec{n} \times \vec{p}$ gilt:

$$(\vec{n} \times \vec{p}) \cdot (\vec{n} \times \vec{p}^*) = |\vec{n} \times \vec{p}|^2 = |\vec{n}|^2 \cdot |\vec{p}|^2 \cdot \cos^2 \theta = p^2 \cos^2 \theta$$

Dabei ist θ der Winkel zwischen \vec{n} und \vec{p} . Damit ergibt sich eine zeitlich gemittelte Abstrahlcharakteristik, wie in der folgenden Abbildung Abb. 12.5 gezeigt ist:

$$\frac{\partial P}{\partial \Omega} = r^2 \vec{n} \cdot \bar{\vec{S}} \propto \text{Re} \{ [(\vec{n} \times \vec{p}) \cdot (\vec{n} \times \vec{p}^*)] \} \propto \sin^2 \theta \quad (12.5.14)$$

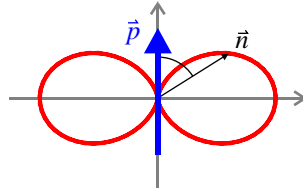


Abb. 12.5.: Abstrahlcharakteristik eines Dipols \vec{p}

Der Dipol strahlt also einen Großteil seiner Energie senkrecht zu \vec{p} ab. Longitudinal zu \vec{p} wird nichts abgestrahlt. Die Stärke des EM-Feldes nimmt dabei mit $\frac{1}{r}$ ab und fällt für $r \rightarrow \infty$ auf null.

2. **Nahfeld** ($R_0 \ll r \ll \lambda$): In diesem Fall erhält man $kr = \frac{2\pi r}{\lambda} \ll 1$. Damit folgt sofort auch $e^{ikr} \approx 1$. Damit kann 1 gegenüber $1/(ikr)$ vernachlässigt werden und man erhält für das \vec{B} -Feld:

$$\vec{B} = \frac{ik}{r^2} (\vec{n} \times \vec{p})$$

Man kann k^2 und $k = 2\pi/\lambda$ ebenfalls gegenüber r vernachlässigen. Für das \vec{E} -Feld ergibt sich dann die Form eines Dipol-Feldes:

$$\vec{E} = \frac{3\vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{p}) - \vec{p}}{r^3}$$

Das \vec{B} -Feld ist hier um einen Faktor $kr \ll 1$ kleiner als das \vec{E} -Feld, sodass dieses das Nahfeld dominiert.

12.6. Beispiel: Kreisförmig bewegte Ladung

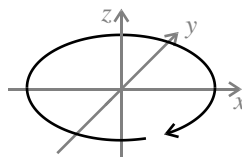


Abb. 12.6.: Abstrahlung einer Ladung auf einer Kreisbahn

Zunächst muss die Ladungsdichte einer Ladung q , die sich mit der Umlauffrequenz ω auf einer Kreisbahn mit Radius r_0 bewegt bestimmt werden. Die Bahn lässt sich wie folgt parametrisieren:

$$\vec{x}(t) = r_0 \cdot \begin{pmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \rho(\vec{r}, t) = q \cdot \delta[\vec{r} - \vec{x}(t)]$$

Man kann damit das Dipolmoment einer solchen Ladung berechnen:

$$\vec{p}(t) = q \int d^3r' \vec{r}' \cdot \delta[\vec{r}' - \vec{x}(t)] = q\vec{x}(t) \stackrel{!}{=} \text{Re} \{ \vec{p} \cdot e^{-i\omega t} \} \Rightarrow \vec{p} = qr_0 \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nun betrachtet man die Abstrahlung in eine beliebige Richtung

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} \cos \phi \sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Mit (12.5.13) kann man dann zunächst den Poynting-Vektor bestimmen ($k = \frac{\omega}{c}$):

$$\begin{aligned} \vec{S} &= \frac{ck^4}{8\pi r^2} \vec{n} \cdot \text{Re} \{ (\vec{n} \times \vec{p}) \cdot (\vec{n} \times \vec{p}^*) \} = \\ &= \frac{c\omega^4 q^2 r_0^2}{8\pi r^2 c^4} \vec{n} \cdot \text{Re} \left\{ \begin{pmatrix} -i \cos \theta \\ \cos \theta \\ i \cos \phi \sin \theta - \sin \phi \sin \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i \cos \theta \\ \cos \theta \\ -i \cos \phi \sin \theta - \sin \phi \sin \theta \end{pmatrix} \right\} = \\ &= \frac{c\omega^4 q^2 r_0^2}{8\pi r^2 c^4} \vec{n} \cdot (2 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = \frac{c\omega^4}{8\pi r^2 c^4} \vec{n} \cdot (1 + \cos^2 \theta) \end{aligned}$$

Daraus erhält man dann die in den Raumwinkel $d\Omega$ abgestrahlte Leistung:

$$\frac{dP}{d\Omega} = r^2 \vec{n} \cdot \vec{S} = \frac{\omega^4 q^2 r_0^2}{8\pi c^3} (1 + \cos^2 \theta)$$

Integriert man dies über den gesamten Winkelbereich $\theta \in [0; \pi]$, so ergibt sich schließlich noch:

$$\bar{P} = \frac{\omega^4 q^2 r_0^2}{3c^3}$$

Die folgende zeigt die Abstrahlcharakteristik. In z -Richtung ist sie etwas reduziert und dafür in der Ebene stärker. Dies kann man auch leicht anschaulich einsehen, da eine beschleunigte Ladung hauptsächlich in Richtung der Beschleunigung abstrahlt. Die Beschleunigung ist hier durch die Zentrifugalkraft gegeben, die die Ladung auf der Kreisbahn hält und folglich in der x, y -Ebene liegt.

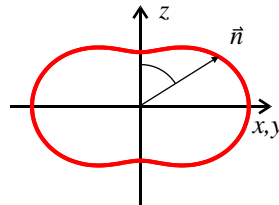


Abb. 12.7.: Abstrahlcharakteristik einer kreisenden Ladung

13. Elektro- und Magnetodynamik in Materie

13.1. Feldgleichungen

Bisher wurde nur die Elektrodynamik im Vakuum betrachtet. In Medien gelten die Feldgleichungen natürlich auf mikroskopischer Ebene genauso, wie im Vakuum. Da man es bei Medien aber oft mit sehr hohen Ladungsdichten, die sich räumlich schnell ändern zu tun hat, macht es Sinn hier eine Mittelung einzuführen. Es ergibt sich dann, dass die Feldgleichungen auch makroskopisch gültig sind.

Man wählt zunächst eine Art zu mitteln. Die Feldgleichungen werden nachher vom Mittelungsprozess unabhängig sein.

Definition 13.1 (Mittelung) Sei $f(\vec{r})$ eine mikroskopische Feldgröße. Dann ist die zu ihr gehörende makroskopische Größe definiert durch:

$$\langle f \rangle(\vec{r}) = \int f(\vec{r}') p(\vec{r} - \vec{r}') d^3 r' = f \star p \quad (13.1.1)$$

Die Mittelung wird also durch Faltung der Feldgröße f mit einer geeigneten Funktion p durchgeführt. So kann p etwa ein Gaußfilter o.ä. sein. Die Funktion $p(\vec{r})$ muss nur zwei Bedingungen erfüllen:

- $p(\vec{r})$ ist lokalisiert um $\vec{r} = 0$
- Man bezeichnet mit λ_{mikro} eine typische mikroskopische und mit λ_{makro} eine typische Makroskopische Längenskala. Dann muss Für die typische Breite Δ von p gelten:

$$\lambda_{\text{mikro}} \ll \Delta \ll \lambda_{\text{makro}}$$

p muss also makroskopisch klein und mikroskopisch groß sein.

Aufgrund der Linearität der Faltungsoperation erhält man sofort:

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x} \right\rangle = \frac{\partial}{\partial x} \langle f \rangle \quad (13.1.2)$$

Damit erhält man sofort auch die makroskopischen, homogenen Feldgleichungen:

$$\text{div} \langle \vec{B}(\vec{r}, t) \rangle = 0 \quad \text{und} \quad \text{rot} \langle \vec{E}(\vec{r}, t) \rangle + \frac{1}{c} \frac{\partial \langle \vec{B}(\vec{r}, t) \rangle}{\partial t} = 0$$

In den inhomogenen Feldgleichungen treten Mittelungen über die Ladungsdichte ρ auf. Hier ist einige Vorsicht geboten. In Materie kann man die Ladungsdichte ρ in zwei Anteile aufspalten:

1. $\rho_{\text{nt}}(\vec{r}, t)$ beschreibt die Dichte der in den Atomen und Molekülen gebundenen Ladungen (also Kerne + gebundene Elektronen).
2. $\rho_{\text{fr}}(\vec{r}, t)$ beschreibt die freien Ladungsträger, die sich nahezu ohne Bindung im Medium bewegen können.

Auf die selbe Weise kann man auch die Stromdichte $\vec{j}(\vec{r}, t)$ aufspalten. Für die freien und für die gebundenen Ladungen gelten jeweils eigene Kontinuitätsgleichungen, sie sind also getrennt Erhaltungsgrößen (die Erhaltung der Gesamtladung bleibt natürlich unberührt):

$$\frac{\partial \rho_{\text{nt}}(\vec{r}, t)}{\partial t} + \text{div} \vec{j}_{\text{nt}}(\vec{r}, t) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \rho_{\text{fr}}(\vec{r}, t)}{\partial t} + \text{div} \vec{j}_{\text{fr}}(\vec{r}, t) = 0 \quad (13.1.3)$$

Für das mikroskopische elektrische Feld φ kann man recht starke Näherungen machen und stellt es als Multipolentwicklung bis zum Dipolterm dar. Dazu ist es nötig das mittlere elektrische Dipolmoment (pro Volumen) des Materials zu definieren:

Definition 13.2 (Polarisierung eines Mediums)

$$\langle \vec{P}(\vec{r}, t) \rangle = \left\langle \sum_i \vec{p}_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) \right\rangle \quad (13.1.4)$$

Dieses Dipolmoment wird durch die induzierte Verschiebung der **gebundenen** Ladungsträger erzeugt.

Man erhält somit:

$$\langle \rho_{\text{nt}}(\vec{r}, t) \rangle = -\vec{\nabla} \cdot \langle \vec{P}(\vec{r}, t) \rangle = -\text{div} \langle \vec{P}(\vec{r}, t) \rangle \quad (13.1.5)$$

Und insgesamt:

$$\text{div} \langle \vec{E}(\vec{r}, t) \rangle = 4\pi (\langle \rho_{\text{nt}}(\vec{r}, t) \rangle + \langle \rho_{\text{fr}}(\vec{r}, t) \rangle) = 4\pi \langle \rho_{\text{fr}}(\vec{r}, t) \rangle - 4\pi \text{div} \langle \vec{P}(\vec{r}, t) \rangle \quad (13.1.6)$$

Es macht daher Sinn zu definieren:

Definition 13.3 (Elektrische Verschiebung)

$$\langle \vec{D} \rangle = \langle \vec{E} \rangle + 4\pi \langle \vec{P} \rangle \quad (13.1.7)$$

Mit dieser Größe erhält die folgende Maxwell-Gleichung

$$\text{div} \langle \vec{D} \rangle = 4\pi \langle \rho_{\text{fr}} \rangle \quad (13.1.8)$$

Die Größe $\langle \vec{D} \rangle$ setzt sich aus dem von außen angelegten und von den freien Ladungen induzierten Feld $\langle \vec{E} \rangle$ und der Polarisierung $\langle \vec{P} \rangle$ des Mediums zusammen. Die zweitere hängt i.A. natürlich vom äußeren Feld $\langle \vec{E} \rangle$ ab.

Über einen ähnlichen Mittelungsprozess über die gebundene Stromverteilung $\vec{j}_{\text{nt}}(\vec{r}, t)$ (ebenfalls nur bis zum Dipolterm) erhält man:

$$\langle \vec{j}_{\text{nt}}(\vec{r}, t) \rangle = \frac{\partial \langle \vec{P}(\vec{r}, t) \rangle}{\partial t} + c \vec{\nabla} \times \langle \vec{M}(\vec{r}, t) \rangle = \frac{\partial \langle \vec{P}(\vec{r}, t) \rangle}{\partial t} + c \text{rot} \langle \vec{M}(\vec{r}, t) \rangle \quad (13.1.9)$$

Die mittlere (gebundene) Stromdichte setzt sich also aus der zeitlichen Änderung der Polarisierung $\langle \vec{P}(\vec{r}, t) \rangle$ des Mediums und dem mittleren magnetischen Dipolmoment $\langle \vec{M}(\vec{r}, t) \rangle$ des Mediums zusammen. Das letzter ist dabei so definiert:

Definition 13.4 (Magnetisierung eines Mediums)

$$\langle \vec{M}(\vec{r}, t) \rangle = \left\langle \sum_i \vec{\mu}_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) \right\rangle \quad (13.1.10)$$

Man erhält damit die folgende Maxwell-Gleichung:

$$\text{div} \langle \vec{B} \rangle - \frac{1}{c} \frac{\partial \langle \vec{E} \rangle}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \langle \vec{j}_{\text{fr}} \rangle + \frac{4\pi}{c} \frac{\partial \langle \vec{P} \rangle}{\partial t} + 4\pi \text{rot} \langle \vec{M} \rangle$$

Hier definiert man analog zu \vec{D} :

Definition 13.5 (magnetische Feldstärke)

$$\langle \vec{H} \rangle = \langle \vec{B} \rangle - 4\pi \langle \vec{M}(\vec{r}, t) \rangle \quad (13.1.11)$$

Mit dieser Größe erhält die folgende Maxwell-Gleichungen

$$\text{div} \langle \vec{B} \rangle = 0 \quad \text{rot} \langle \vec{H} \rangle = \frac{1}{c} \frac{\partial \langle \vec{D} \rangle}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \langle \vec{j}_{\text{fr}} \rangle \quad (13.1.12)$$

13.2. Materialgleichungen

Bisher wurde die Größen $\langle \vec{M} \rangle$ und $\langle \vec{P} \rangle$ nur mikroskopisch definiert. Die Position des Ladungsträger/Ströme im Medium ist aber von den externen Feldern abhängig. Man benötigt also sog. **Materialgleichungen**, die eine makroskopische Berechnung von $\langle \vec{M} \rangle$ und $\langle \vec{P} \rangle$ ermöglichen. Solche Materialgleichungen sind empirische und durch Experimente zu belegende Gleichungen, die i.A. nicht mit der Elektrodynamik begründet werden können (wohl u.U. aber mit anderen Teilgebieten der theoretischen Physik). Man kann folgenden allgemeinen Ansatz machen:

$$\vec{P}(\vec{r}, t) = \vec{P}_0 + \int \alpha(t - t') \vec{E}(\vec{r}, t') dt' \quad \vec{M}(\vec{r}, t) = \vec{M}_0 + \int \beta(t - t') \vec{B}(\vec{r}, t') dt' \quad (13.2.1)$$

Dies bedeutet, dass die Polarisierung/Magnetisierung zum Zeitpunkt t über $\alpha(\cdot)$ bzw. $\beta(\cdot)$ von der Vorgeschichte des Feldes abhängt (z.B. Hysterese bei magnetischen Materialien!). Oft ist aber ein viel einfacherer Zusammenhang ausreichend:

$$\vec{P}(\vec{r}, t) = \chi_e \vec{E}(\vec{r}, t) \quad \vec{M}(\vec{r}, t) = \chi_m \vec{B}(\vec{r}, t) \quad (13.2.2)$$

Dabei sind χ_e und χ_m die elektrischen bzw. magnetischen Suszeptibilitäten des Materials. Hier kann man dann mit (13.1.7) und (13.1.11) schreiben:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \quad \epsilon = 1 + 4\pi\chi_e \quad \vec{B} = \mu \vec{H}, \quad \mu = 1 + 4\pi\chi_m \quad (13.2.3)$$

Gelten solche einfache Beziehungen, so spricht man von linearen Medien. Für die Anwendung können aber auch kompliziertere (z.B. quadratische) Abhängigkeiten interessant sein und es gibt einige Effekte, die auf solchen nicht-linearen Materialien beruhen. Man kann anhand der Suszeptibilitäten verschiedene Materialien unterscheiden:

- **elektrische Materialien:** Es gilt immer $\chi_e, \epsilon > 0$
 - **Dielektrika:** Hier werden durch Verschiebungen in der Elektronenhülle Dipole induziert.
 - **Paraelektrika:** Hier existieren bereits elektrische Dipole, die im externen Feld ausgerichtet werden. (χ_e ist temperaturabhängig).
 - **Ferroelektrika:** Es liegen bereits elektrische Dipole vor, die sich bei angelegtem Feld bis zu einem Maximalwert ausrichten. Wird das Feld wieder reduziert, so bildet sich die Polarisation nicht ganz zurück (Hysterese-Effekt).
- **Magnetische Materialien:**
 - **Diamagneten:** Durch ein externes Feld werden magnetische Dipole induziert. Es gilt $\chi_m < 0$ die Dipole wirken also dem sie induzierenden Feld entgegen.
 - **Paramagneten:** Permanente magnetische Dipole richten sich im Feld aus. $\chi_m > 0$ und temperaturabhängig.
 - **Ferromagneten:** permanente magnetische Dipole richten sich im Feld aus. Es kommt zu einem Hysterese-Effekt (siehe Ferroelektrika). Der Zusammenhang zwischen Magnetisierung und Magnetfeld ist nicht-linear. Oberhalb einer gewissen Sprungtemperatur gehen die ferromagnetischen Eigenschaften verloren und das Material wird paramagnetisch.

13.3. Stetigkeitsbedingungen

In diesem Abschnitt wird das Verhalten der Felder \vec{E} , \vec{D} , \vec{B} , \vec{H} an Grenzflächen zwischen zwei Medien untersucht. Dies bildet die Grundlage für Brechungseffekte von elektromagnetischen Wellen (z.B. in der Optik).

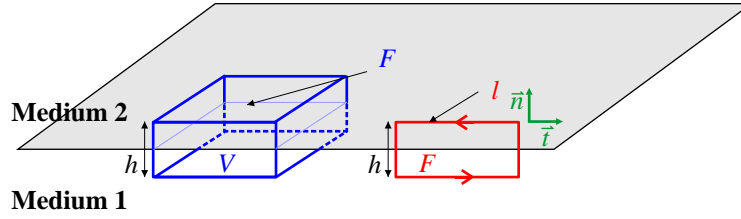


Abb. 13.1.: Zur Berechnung der Stetigkeitsbedingungen

Analog zu Abschnitt 7.3.2 ergibt sich durch Anwendung des Gauß'schen Satzes auf $\vec{\nabla} \cdot \langle \vec{D} \rangle = 4\pi \langle \rho_{\text{fr}} \rangle$ für $h \rightarrow 0$:

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{D} dV = \int_{\partial V} \vec{d} \cdot d\vec{A} = (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \vec{n} \cdot \delta F = 4\pi \int_V \rho_{\text{fr}} dV = \delta q$$

Also insgesamt:

$$(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \vec{n} = 4\pi \sigma, \quad \sigma = \frac{\delta q}{\delta F}$$

Über eine analoge Rechnung erhält man aus $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$:

$$(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \vec{n} = 0$$

Mit dem Stokes'schen Satz kann man aus den Maxwell-Gleichungen mit Rotation ähnliche Beziehungen folgern. Man geht zunächst von $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}_{\text{fr}}$ aus. Es gilt dann (mit dem roten Integrationsweg):

$$\int_F (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \cdot d\vec{A} = \frac{1}{c} \int_F \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{A} + \frac{4\pi}{c} \int_F \vec{j}_{\text{fr}} \cdot d\vec{A} = \oint_{\partial F} \vec{H} \cdot d\vec{s} = (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \cdot \vec{t} \cdot \delta l$$

Nimmt man nun an, dass $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ an der Grenzfläche endlich bleibt, dann geht der Term $\frac{1}{c} \int_F \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{A}$ mit h gegen 0 und es bleibt:

$$(\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \cdot \vec{t} = \frac{4\pi}{c} J, \quad J = \frac{I}{\delta l}$$

Dabei ist J die Oberflächenstromdichte (Strom/Länge). Analog ergibt sich aus $\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$:

$$(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \vec{t} = 0$$

Es gilt also zusammenfassend:

Satz 13.1 (Stetigkeitsbedingungen an Grenzflächen zwischen verschiedenen Medien) Die Normalkomponente von \vec{B} und die Tangentialkomponente von \vec{E} bleiben gleich. Die Normalkomponente von \vec{D} und die Tangentialkomponente von \vec{H} machen einen Sprung, der proportional zur Oberflächenladungs- bzw. stromdichte ist.

13.4. Beispiel: Dielektrische Kugel im homogenen elektrischen Feld

Analog zu Abschnitt 7.5.3 betrachtet man hier eine dielektrische Kugel, die sich in einem externen elektrischen Feld $\vec{E}_0 = E_0 \cdot \vec{e}_z$ befindet. Hier soll nun das elektrische Potential und Feld in und außerhalb der Kugel berechnet werden (siehe Abb. 7.6).

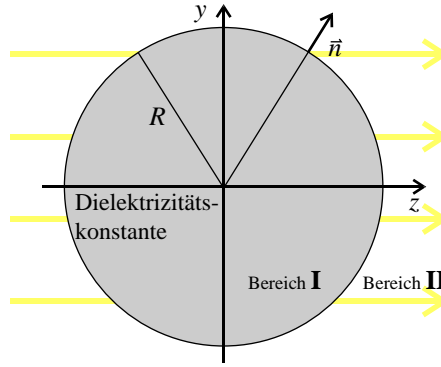


Abb. 13.2.: zur Berechnung des Feldes einer dielektrischen Kugel im homogenen elektrischen Feld

Das Problem weist Rotationssymmetrie um die z -Achse (also parallel zum externen Feld) auf. Da keine externen Ladungen vorhanden sind (nur die induzierte Ladungs-/Dipolverteilung in der Kugel) beschränkt sich das Problem also auf die Lösung der Laplace-Gleichung $\Delta\varphi = 0$. Dabei sind allerdings die folgenden Randbedingungen einzuhalten:

1. in unendlichem Abstand geht das gestörte elektrische Feld wieder in \vec{E}_0 über.
2. An der Kugeloberfläche ist die Tangentialkomponente von \vec{E} und die Normalkomponente von \vec{D} stetig.

Für die Lösung der Laplace-Gleichung kann man aufgrund der Symmetrie folgenden Ansatz machen:

$$\varphi_I(\vec{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos\theta) \quad \varphi_{II}(\vec{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} [B_l r^l + C_l r^{-(l+1)}] P_l(\cos\theta)$$

In der ersten Gleichung wurde der Term $D_l r^{-(l+1)}$ gleich weggelassen, weil er zu einem singulären Potential für $r \rightarrow 0$ führen würde. Dies würde aber eine Überschussladung implizieren, die in der Mitte der Kugel lokalisiert ist. Dieser Fall wird durch die Gesamtladung $Q = 0$ der Kugel ausgeschlossen. Nun zur Berechnung:

- Aus der ersten Bedingung erhält man:

$$\vec{\nabla}\varphi_{II}(\vec{r})|_{|\vec{r}|\rightarrow\infty} = -\vec{E}_0 = -E_0\vec{e}_z \Rightarrow B_1 = -E_0, B_{l\neq 1} = 0.$$

- Wenn die Tangentialkomponente des \vec{E} -Feldes stetig ist, so gilt für das Potential:

$$\frac{\partial\varphi_I}{\partial\theta}(R) = \frac{\partial\varphi_{II}}{\partial\theta}(R)$$

Zur Berechnung dieser Bedingung nutzt man die Rekursionsbedingung der Legendre-Polynome

$$\frac{dP_n(x)}{dx} = \frac{1}{x^2 - 1} [nxP_n(x) - nP_{n-1}(x)].$$

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi_I}{\partial\theta} &= \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l \frac{\partial P_l(\cos\theta)}{\partial\cos\theta} \frac{\partial\cos\theta}{\partial\theta} = \\ &= - \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l \sin\theta \frac{1}{\cos^2\theta - 1} [l\cos\theta P_l(\cos\theta) - lP_{l-1}(\cos\theta)] = \\ &= - \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l \sin\theta \frac{1}{-\sin^2\theta} [l\cos\theta P_l(\cos\theta) - lP_{l-1}(\cos\theta)] = \\ &= \frac{1}{\sin\theta} \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l [l\cos\theta P_l(\cos\theta) - lP_{l-1}(\cos\theta)] \end{aligned}$$

Analog erhält man:

$$\frac{\partial \varphi_{II}}{\partial \theta} = \frac{1}{\sin \theta} \sum_{l=0}^{\infty} [B_l r^l + C_l r^{-(l+1)}] \cdot [l \cos(\theta) P_l(\cos(\theta)) - l P_{l-1}(\cos(\theta))]$$

Aus dem Vergleich dieser beiden Ausdrücke erhält man:

$$A_l r^l = B_l r^l + C_l r^{-(l+1)}$$

An der Stelle $r = R$ erhält man dann mit der obigen Bedingung für B_l :

$$A_1 = -E_0 + \frac{C_1}{R^3} \quad \text{und} \quad A_{l \neq 1} = \frac{C_l}{R^{2l+1}}$$

- Es gilt $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$. Die Normalkomponenten des \vec{D} -Feldes sind an der Kugeloberfläche stetig. Aus beiden Bemerkungen erhält man analog zu oben:

$$\epsilon \cdot \frac{\partial \varphi_I}{\partial r}(R) = \frac{\partial \varphi_{II}}{\partial r}(R)$$

Für die beiden Potentiale kann man die Ableitungen wieder ausrechnen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_I}{\partial r} &= \sum_{l=1}^{\infty} A_l l r^{l-1} P_l(\cos \theta) \\ \frac{\partial \varphi_{II}}{\partial r} &= \sum_{l=1}^{\infty} [B_l l r^{l-1} - C_l (l+1) r^{-(l+2)}] P_l(\cos \theta) \end{aligned}$$

Aus dem Vergleich der einzelnen Terme erhält man:

$$\epsilon A_1 = -E_0 - \frac{C_1}{2R^3} \quad \text{und} \quad \epsilon A_{l \neq 1} = -\frac{l+1}{l} \frac{C_l}{R^{2l+1}}$$

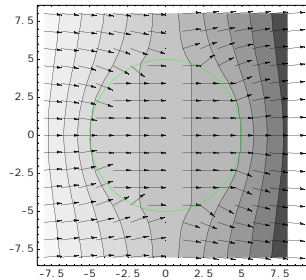
Die so ermittelten Bedingungen für A_l, B_l, C_l sind nur durch folgende Setzung erfüllbar:

$$A_1 = -E_0 \frac{3}{\epsilon + 2}, \quad B_1 = -E_0, \quad C_1 = E_0 R^3 \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2}, \quad A_{l \neq 1} = B_{l \neq 1} = C_{l \neq 1} = 0$$

Es spielen also nur die Dipolkomponenten der Entwicklung in Kugelflächenfunktionen eine Rolle. Insgesamt erhält man:

$$\varphi_I(r, \theta) = -E_0 \frac{3}{2 + \epsilon} r \cos \theta \quad \varphi_{II}(r, \theta) = -E_0 r \cos \theta + E_0 \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} \frac{R^3}{r^2} \cos \theta$$

Die folgende Abbildung zeigt das Ergebnis (Potential und Feld):



Das elektrische Feld weist die erwarteten Unstetigkeiten an der Kugeloberfläche auf. Im inneren der Kugel stellt sich ein homogenes Feld ein, das durch die induzierte Ladungsverschiebung erzeugt wird. Das Potential außerhalb der Kugel entspricht dem ursprünglichen Feld \vec{E}_0 , dem das Feld eines in z -Richtung ausgerichteten Dipols überlagert ist.

14. Elektromagnetische Wellen

Im letzten Abschnitt 12 wurde beschrieben, wie sich elektromagnetische Strahlung, als EM-Felder mit gerichtetem Energiefluss, erzeugen lassen. Dieser Abschnitt beschreibt nun, wie sich solche Felder (in der Form elektromagnetischer Wellen) im Raum ausbreiten. Dabei geht man von den makroskopischen Maxwell-Gleichungen in Materie aus (siehe Abschnitt 13) und leitet aus ihnen die Wellengleichungen für das \vec{E} - und \vec{B} -Feld her. Danach können verschiedene Phänomene, die sich bei EM-Wellen ergeben, diskutiert werden (Dispersion bei Wellenpaketen, Brechung an Oberflächen usw.).

14.1. Wellengleichung in nicht-leitenden Medien

Zunächst nimmt man ein einfaches, lineares Medium an, also:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \qquad \vec{B} = \mu \vec{H} \qquad (14.1.1)$$

Nun kann man die Maxwell-Gleichungen im Ladungs- und Stromfreien Raum aufschreiben:

$$\epsilon \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \qquad (14.1.2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{\epsilon \mu}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \qquad (14.1.3)$$

Wendet man nun die Rotation $\vec{\nabla} \times$ nochmal auf die Gleichungen (14.1.3) an, so erhält man mit $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{a}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) - \Delta \vec{a}$:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \vec{E} + \frac{\partial}{c \partial t} \vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla}(\underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{E}}_{=0}) - \Delta \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon \mu}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = -\Delta \vec{E} + \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

Führt man nun noch als Abkürzung den sog. **Brechungsindex**

$$n = \sqrt{\epsilon \mu} \qquad (14.1.4)$$

ein, so ergibt sich daraus die Wellengleichung:

$$\Delta \vec{E} - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \qquad (14.1.5)$$

In einer Wellengleichung steht die Phasengeschwindigkeit als Faktor $1/v_{\text{ph}}^2$ vor der zeitlichen Ableitung. Man schließt also: Das Licht bewegt sich in linearer Materie mit der reduzierten Lichtgeschwindigkeit $v_{\text{ph}} = \frac{c}{n}$. Zur weiteren (noch einfacheren) Darstellung kann man noch den **D'Alembert-Operator** einführen:

$$\square \equiv \Delta - \frac{1}{v_{\text{ph}}^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad \Rightarrow \quad \text{Wellengleichung: } \square \vec{E} = 0 \qquad (14.1.6)$$

Analog zu (14.1.5) erhält man auch eine Wellengleichung für \vec{B} :

$$\Delta \vec{B} - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \qquad (14.1.7)$$

14.2. Lösung der Wellengleichung in nicht-leitenden Medien

14.2.1. Ebene Wellen

Um die Gleichungen (14.1.5) und (14.1.7) zu lösen macht man den folgenden Ansatz für Schwingungen der Frequenz ω (komplexere Schwingungen können evtl. mit einem gewichteten Integral / Fourier-Integral über ω dargestellt werden):

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \quad (14.2.1)$$

Diese Felder beschreiben ebene **monochromatische, ebene Wellen**. Aus ihnen lassen sich über Fourier-Integrale beliebige komplexere Wellen darstellen. Man kann aber auch den etwas allgemeineren Ansatz für monochromatische Wellen machen:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}) e^{-i\omega t} \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}(\vec{r}) e^{-i\omega t} \quad (14.2.2)$$

Hier soll aber nur auf (14.2.1) eingegangen werden. Setzt man die Lösungen $\vec{E}(\vec{r}, t)$ in die Wellengleichung ein, so ergibt sich (**Dispersionsrelation**):

$$\vec{k}^2 = \frac{\omega^2 n^2}{c^2} \Leftrightarrow \omega^2 = \frac{c^2 \vec{k}^2}{n^2} \Rightarrow v_{ph} = \frac{\omega}{k} \quad (14.2.3)$$

Man kann die Form der Lösung noch etwas gegenüber dem Ansatz (14.2.1) einschränken, wenn man die Lösungen in die Maxwell-Gleichungen (14.1.3) einsetzt, so erhält man mit (3.4.4) und (3.4.5):

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times [\vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}] + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} [\vec{B}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}] &= (\vec{\nabla} e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}) \times \vec{E}_0 + e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{E}_0}_{=0} - \frac{i\omega}{c} \vec{B}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} = \\ &= i\vec{k} \times \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} - \frac{i\omega}{c} \vec{B}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} = 0 \end{aligned}$$

Daraus erhält man sofort die Bedingung (für \vec{B} analog):

$$\vec{k} \times \vec{E}_0 = \frac{\omega}{c} \vec{B}_0 \quad \vec{k} \times \vec{B}_0 = -\epsilon\mu \frac{\omega}{c} \vec{E}_0 \quad (14.2.4)$$

Beim einsetzen in die Maxwell-Gleichungen (14.1.2) erhält man:

$$\vec{\nabla} \cdot [\vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}] = \vec{E}_0 \cdot [\vec{\nabla} e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}] + e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \underbrace{[\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_0]}_{=0} = \vec{E}_0 \cdot [-i\vec{k} e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}] = 0$$

Dies ergibt (analog für \vec{B}) die Beziehungen:

$$\vec{k} \cdot \vec{E}_0 = 0 \quad \vec{k} \cdot \vec{B}_0 = 0 \quad (14.2.5)$$

Man kann also festhalten, dass \vec{E}_0 und \vec{B}_0 senkrecht aufeinander stehen und beide senkrecht auf dem Wellenvektor \vec{k} . Damit kann man auch das Verhältnis der Beträge von \vec{E} und \vec{B} berechnen:

$$|\vec{B}_0| = \frac{c}{\omega} |\vec{k} \times \vec{E}_0| = \frac{c}{\omega} |\vec{k}| |\vec{E}_0| \cdot \sin(90^\circ) = \frac{c}{\omega} \frac{n\omega}{c} |\vec{E}_0| = n |\vec{E}_0| \quad (14.2.6)$$

Als nächstes soll der Energie- und Impuls-Transport berechnet werden, also der Poynting-Vektor:

$$\begin{aligned} \vec{S} &= \frac{c}{8\pi} \text{Re} \{ \vec{E} \times \vec{H}^* \} = \frac{c}{8\pi\mu} \text{Re} \{ \vec{E} \times \vec{B}^* \} = \frac{c}{8\pi\mu} \text{Re} \{ \vec{E}_0 \times \vec{B}_0^* \} = \frac{c}{8\pi\mu} \frac{c}{\omega} \text{Re} \{ \vec{E}_0 \times (\vec{k} \times \vec{E}_0^*) \} = \\ &= \frac{c^2}{8\pi\mu\omega} \text{Re} \{ \vec{k}(\vec{E}_0 \cdot \vec{E}_0^*) - \vec{E}_0(\vec{E}_0^* \cdot \vec{k}) \} = \frac{c^2}{8\pi\mu\omega} \text{Re} \{ \vec{k}(\vec{E}_0 \cdot \vec{E}_0^*) \} = \frac{c^2}{8\pi\mu\omega} |\vec{E}_0|^2 \cdot \vec{k} \propto \vec{k} \end{aligned} \quad (14.2.7)$$

Die Energie fließt also im Mittel in Richtung \vec{k} . Zum Schluss kann man noch die Energiedichte berechnen:

$$\overline{\epsilon_{EM}} = \frac{1}{16\pi} [|\vec{D}|^2 + |\vec{H}|^2] = \frac{1}{16\pi} \left[\epsilon |\vec{E}_0|^2 + \frac{1}{\mu} |\vec{B}_0|^2 \right] = \frac{1}{16\pi} \left[\epsilon |\vec{E}_0|^2 + \frac{\epsilon\mu}{\mu} |\vec{E}_0|^2 \right] = \frac{\epsilon}{8\pi} |\vec{E}_0|^2$$

Man kann also zusammenfassen:

Satz 14.1 (Ebene, monochromatische Wellen in nichtleitenden Medien) Im nichtleitenden Medium gelten die folgenden Wellen-Gleichungen:

$$\Delta \vec{E} - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$\Delta \vec{B} - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0$$

Als einfache Lösungen erhält man:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$$

Dabei stehen \vec{B} , \vec{E}_0 senkrecht auf dem Wellenvektor \vec{k} , der die Ausbreitungsrichtung der Wellen angibt. Außerdem stehen sie senkrecht aufeinander. Die Felder \vec{E}_0 und \vec{B}_0 sind eindeutig gekoppelt, sodass man i.A. nur \vec{E} betrachten muss. Es gilt:

$$\vec{B}_0 = \frac{c}{\omega} (\vec{k} \times \vec{E}_0)$$

Für die Welle gilt folgende Dispersionsrelation:

$$\omega^2 = \frac{c^2 \vec{k}^2}{n^2} \quad \text{mit } n = \sqrt{\epsilon\mu}, \quad \frac{2\pi}{\lambda}$$

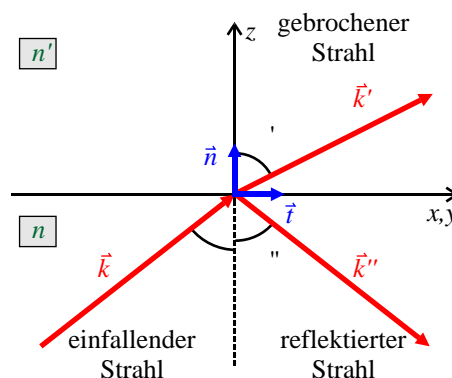
Die Phasengeschwindigkeit der Welle ist:

$$v_{ph} = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n} < c$$

Noch eine Schlussbemerkung: Es wurde bereits gezeigt, dass es genügt das \vec{E} -Feld zu betrachten und daraus nachher das \vec{B} -Feld zu berechnen. Zusätzlich wird im folgenden des öfteren der Fall ausbreiten, dass sich die Strahlen linear in einer Richtung ausbreiten. Damit kann man das Koordinatensystem natürlich auch so drehen, dass $\vec{k} = k \cdot \vec{e}_z$ gilt. Dies vereinfacht einige der obigen Ausdrücke. Man nennt dann die z -Achse auch **optische Achse**.

14.2.2. Reflexion und Brechung

Hier wird die Frage geklärt, wie sich ebene Wellen verhalten, wenn sie auf eine Grenzfläche zwischen zwei Medien mit den Brechungsindizes n, n' treffen. Dazu definiert man die Größen an der Grenzfläche wie folgt:



einfallende Welle:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}, \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{x}{\omega} \vec{k} \times \vec{E}(\vec{r}, t)$$

$$\vec{k} \perp \vec{E}_0, \quad \omega^2 = \frac{c^2 \vec{k}^2}{n^2}$$

gebrochene Welle:

$$\vec{E}'(\vec{r}, t) = \vec{E}'_0 e^{i(\vec{k}'\vec{r} - \omega' t)}, \quad \vec{B}'(\vec{r}, t) = \frac{x}{\omega'} \vec{k}' \times \vec{E}'(\vec{r}, t)$$

$$\vec{k}' \perp \vec{E}'_0, \quad \omega'^2 = \frac{c^2 \vec{k}'^2}{n'^2}$$

reflektierte Welle:

$$\vec{E}''(\vec{r}, t) = \vec{E}''_0 e^{i(\vec{k}''\vec{r} - \omega'' t)}, \quad \vec{B}''(\vec{r}, t) = \frac{x}{\omega''} \vec{k}'' \times \vec{E}''(\vec{r}, t)$$

$$\vec{k}'' \perp \vec{E}''_0, \quad \omega''^2 = \frac{c^2 \vec{k}''^2}{n^2}$$

Aus Abschnitt 13.3 weiß man, dass folgende Komponenten der Felder stetig sein müssen:

$$\vec{E}_t, \vec{H}_t, \vec{B}_n, \vec{D}_n \quad \text{müssen bei } z = 0 \text{ stetig sein.}$$

Diese Bedingungen sind nur dann für alle Zeiten erfüllbar, wenn die Exponential-Anteile in den Wellen bei $z = 0$ übereinstimmen. Es gilt also:

$$\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t = \vec{k}' \cdot \vec{r} - \omega' t = \vec{k}'' \cdot \vec{r} - \omega'' t \quad (z = 0)$$

Spezielle bei $\vec{x} = 0$ muss diese Bedingung also auch gelten. Daraus ergibt sich aber sofort:

$$\omega = \omega' = \omega''$$

Dies bedeutet, dass sich die Frequenz der Welle beim Übertritt von einem Medium in ein anderes nicht ändert. Um die Dispersionsrelation zu erfüllen muss sich also \vec{k} und mithin die Wellenlänge $\lambda = 2\pi/k$ ändern. Aus obigen Dispersionsrelationen folgt mit der Gleichheit der Frequenzen:

$$\omega = \omega'' \Rightarrow \frac{c^2 \vec{k}^2}{n^2} = \frac{c^2 \vec{k}''^2}{n^2} \Rightarrow |\vec{k}| = |\vec{k}''|$$

Aus der speziellen Zeit $t = 0$ erhält analog zu oben:

$$\vec{k} \cdot \vec{x} = \vec{k}' \cdot \vec{x} = \vec{k}'' \cdot \vec{x} \quad (z = 0)$$

Dies bedeutet anschaulich, dass sich alle Wellenvektoren in einer Ebene befinden müssen. In der Abbildung sind Winkel eingezeichnet. Mit diesen kann man nun schreiben:

$$k_y = k \sin \phi, \quad k'_y = k' \sin \phi', \quad k''_y = k'' \sin \phi'' = k \sin \phi''$$

Aus der ersten und letzten Beziehung erhält man $(\vec{t} \cdot \vec{k} = \vec{t} \cdot \vec{k}'')$ folgt, weil $(\vec{t})_z = 0$ gilt aus obigen Bedingungen):

$$\frac{\sin \phi}{\sin \phi''} = \frac{k_y}{k''_y} = \frac{\vec{t} \cdot \vec{k}}{\vec{t} \cdot \vec{k}''} = 1 \Rightarrow \phi = \phi''$$

Analog erhält man $(\vec{t} \cdot \vec{k} = \vec{t} \cdot \vec{k}')$ folgt wie oben):

$$\frac{\sin \phi'}{\sin \phi} = \frac{k'_y}{k_y} \frac{k}{k'} = \frac{\vec{t} \cdot \vec{k}'}{\vec{t} \cdot \vec{k}} \frac{k}{k'} = \frac{k}{k'} = \frac{n}{n'}$$

Totalreflexion: Als erste Anwendung kann man die Bedingung für Totalreflexion ableiten. Nach obiger Ableitung gilt beim Übergang von einem optisch dichteren zu einem optisch dünneren medium $n' < n$:

$$\sin \phi = \frac{n'}{n} \sin \phi' < 1$$

$\sin \phi'$ kann maximal 1 sein. Darum gibt es einen Winkel $\phi_{tr} = \arcsin \frac{n'}{n}$, ab dem $\phi' \geq \frac{\pi}{2}$ werden muss, um obiges Gesetz zu erfüllen. Bei $\phi = \phi_{tr}$ wird der einfallende Strahl in die Grenzfläche gebrochen. Für $\phi > \phi_{tr}$ wird folglich alles Licht reflektiert. Man spricht dann von Totalreflexion.

Man erhält also insgesamt:

Satz 14.2 (Brechungsgesetz) *Trifft eine ebene, monochromatische Welle auf eine Grenzfläche zwischen Brechungsindizes n und n' , so gilt:*

- Die Frequenzen der einlaufenden, gebrochenen und reflektierten Welle sind gleich.
- Alle drei auftretenden Wellenvektoren befinden sich in einer Ebene, die z.B. vom Normalenvektor \vec{n} der Fläche und dem Wellenvektor \vec{k} der einlaufenden Welle aufgespannt wird.
- Bei der Reflexion ist Einfallswinkel und Ausfallswinkel gleich:

$$\phi = \phi''$$

- Für den gebrochenen Strahl gilt:

$$\frac{\sin \phi}{\sin \phi'} = \frac{n'}{n}$$

- Ab dem Einfallswinkel

$$\phi_{tr} = \arcsin \frac{n'}{n}$$

wird das gesamte Licht reflektiert (**Totalreflexion**).

14.2.3. Weitere Einfache Wellentypen

Dieser Abschnitt listet weitere wellenartige Lösungen der Wellengleichungen im Ladungsfreien Raum.

Kugelwellen breiten sich konzentrisch von einem punktförmigen Erreger aus. Sie werden z.B. von einem Dipol erzeugt (siehe Abschnitt 12.5). Ihre Amplitude fällt mit $\frac{1}{r}$ gegen 0 ab. Sie gehorchen der Gleichung:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \text{Re} \left\{ \vec{E}_0 \cdot \frac{e^{-i(\omega t - kr)}}{kr} \right\}. \quad (14.2.8)$$

Diese Wellen haben keine ausgezeichnete Ausbreitungsrichtung. Die Wellenfronten (Phasenflächen) sind vollständig kugelsymmetrisch.

Parabolische Wellen ergeben sich aus den Kugelwellen durch die **paraxiale Näherung** (achsnahe Strahlen). D.h. man geht davon aus, dass sich das Licht nur nahe der optischen Achse (z -Achse, also $\vec{k} = k \cdot \vec{e}_z$) ausbreitet ($\sqrt{x^2 + y^2} \ll z$). Diese Näherung bedeutet auch, dass man das Fernfeld des Strahlers betrachtet, der Abstand z also sehr groß ist. Dabei geht r in (14.2.8) über in:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \approx z + \frac{x^2 + y^2}{2z}$$

Mit diesem Ergebnis erhält man dann:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{E}_0 \cdot e^{-ikz}}{z} \cdot \exp \left[-ik \frac{x^2 + y^2}{2z} \right] \quad (14.2.9)$$

Im Nenner wurde zusätzlich $(x^2 + y^2)/z$ gegenüber z in (14.2.8) vernachlässigt. Die folgende Abb. 14.1 zeigt die Bereiche eines Punktstrahlers mit den verschiedenen Näherungen der Welle.

14.2.4. Helmholtz-Gleichung

Setzt man den Ansatz $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}) \cdot e^{-i\omega t}$ aus (14.2.2) in die Wellengleichung ein, so ergibt sich die etwas einfachere **Helmholtzgleichung**:

$$\left(\vec{\nabla}^2 + k^2 \right) \vec{E}(\vec{r}) = 0, \quad \text{mit:} \quad k = \frac{\omega}{c}. \quad (14.2.10)$$

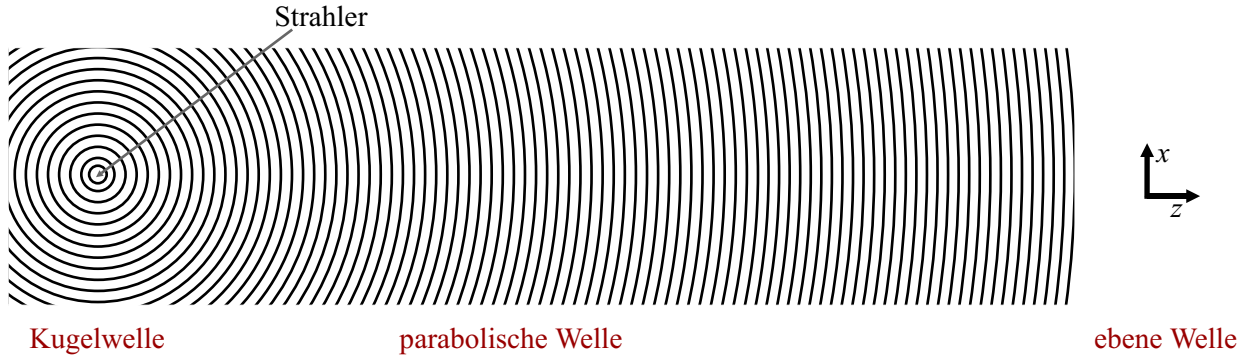


Abb. 14.1.: Wellenfeld eines Punktstrahlers, mit Übergang von der Kugelwelle zu parabolischen und schließlich zu ebenen Wellen

Paraxiale Strahlen: Eine Welle heißt *paraxial*, wenn die Normalen auf ihren Phasenflächen paraxiale Strahlen darstellen, ihr Abstand von der optischen Achse (z -Achse) also klein bleibt, im Vergleich zu Position in z -Richtung, also $x^2 + y^2 \ll z^2$. Dies bedeutet aber auch, dass die Winkel θ der Strahlen zur optischen Achse klein sind ($\theta^2 \ll 1$). Eine Möglichkeit eine solche Welle zu modellieren ist ein Ansatz, wie für die Helmholtz-Gleichung, also $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}) \cdot e^{-i\omega t}$. Zusätzlich modifiziert man diesen Ansatz folgendermaßen: Man geht von ebenen Wellen aus, die sich in z -Richtung ausbreiten $\vec{E}(\vec{r}) = e^{-ikz}$ und verformt diese Wellenfronten durch einen positionsabhängigen Faktor $A(\vec{r})$. Damit erhält man dann:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}) \cdot e^{-i\omega t} \quad \text{mit} \quad \boxed{\vec{E}(\vec{r}) = A(\vec{r}) \cdot e^{-ikz}} \quad (14.2.11)$$

Die Änderung von $A(\vec{r})$ muss langsam gegen die Wellenlänge $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ sein. Damit ein Ansatz (14.2.11) der Helmholtz-Gleichung (14.2.10) genügt, muss $A(\vec{r})$ der folgenden, *paraxiale Helmholtzgleichung* genannten, Formel genügen:

$$\boxed{\vec{\nabla}_{\perp}^2 A - 2ik \frac{\partial A}{\partial z} = 0, \quad \text{dabei ist} \quad \vec{\nabla}_{\perp}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}} \quad (14.2.12)$$

Eine der einfachsten Lösungen dieser Gleichung ist die parabolische Welle

$$A(\vec{r}) = \frac{A_1}{z} \cdot \exp \left[-ik \frac{x^2 + y^2}{2z} \right] \quad (14.2.13)$$

14.2.5. Wellenpakete

Alle bisher diskutierten Wellen waren monochromatisch. D.h. sie enthalten nur eine Wellenlänge (die allerdings vom Medium abhängt) bzw. nur eine Frequenz. Beide sind über die Dispersionsrelation verbunden. In realen Situationen hat man aber so gut wie nie monochromatisches Licht vorliegen. Selbst ein Laser hat eine gewissen Linienebreite seiner Strahlung. Man muss deswegen **Wellenpakete** betrachten, die sich aus verschiedenen Frequenzen zusammensetzen und die auch räumlich begrenzt sein können. Im folgenden wird davon ausgegangen, dass sich die Welle in positiver z -Richtung bewegt. Dies vereinfacht einiger der Ausdrücke. Insbesondere wird $\vec{k} \cdot \vec{r} = kz$. Außerdem wird man nicht den ganze \vec{E} -Feldvektor mitschleppen, sondern nur eine Komponente betrachten. Man setzt dann für ein Wellenpaket an:

$$\psi(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(k) e^{i[kz - \omega(k)t]} dk \quad (14.2.14)$$

Der Faktor $f(k)$ gibt an, wie stark die Mode k in dem Wellenpaket enthalten ist. Man nimmt hier eine ganz allgemeine Dispersionsrelation an:

$$\omega(k) = \frac{ck}{n(\omega)} \quad \Leftrightarrow \quad \omega \equiv \omega(k) \quad (14.2.15)$$

Die zweite allgemeinere Form geht durch Auflösen nach ω der linken Form hervor. Zur Zeit $t = 0$ stellt nach (14.2.14) $\psi(z, t)$ gerade die Fouriertransformierte der Funktion $f(k)$ dar. Damit kann man die FT umkehren und

erhält:

$$f(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(z, 0) e^{-ikz} dz \quad (14.2.16)$$

Weist die Verteilung $f(k)$ ein scharfes Maximum k_0 auf, so liefert nur ein relativ kleiner Bereich $\pm \Delta k$ um k_0 einen Beitrag zur Welle. Dieser Umstand bedeutet aber wegen der Dispersionsrelation (14.2.15), dass auch nur ein relativ kleiner Bereich von ω eine Rolle spielt. Man kann deswegen $\omega(k)$ um k_0 nach Taylor entwickeln:

$$\omega(k) \approx \omega(k_0) + \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k=k_0} (k - k_0) + \left. \frac{d^2\omega}{dk^2} \right|_{k=k_0} (k - k_0)^2 = \omega_0 + v_g \cdot (k - k_0) + \gamma \cdot (k - k_0)^2 \quad (14.2.17)$$

$$(14.2.18)$$

Dabei wurden folgende Setzungen gemacht:

$$v_g = \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k=k_0} \quad \text{Gruppengeschwindigkeit} \quad (14.2.19)$$

$$\gamma = \left. \frac{d^2\omega}{dk^2} \right|_{k=k_0} \quad \text{Dispersionsparameter} \quad (14.2.20)$$

Sollte $\omega(k)$ in der Umgebung von k_0 stark variieren kann es u.U. nötig sein noch weitere Ordnungen der Taylor-Entwicklung hinzuzunehmen. Das ändert aber nichts an der Bedeutung der hier aufgeführten Parameter v_g und γ . Setzt man diese Entwicklung bis zur ersten Ordnung in k nun in (14.2.14) ein, so erhält man:

$$\psi(z, t) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(k) e^{i[kz - (\omega_0 + v_g \cdot (k - k_0)) \cdot t]} dk = \quad (14.2.21)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i(v_g k_0 - \omega_0)t} \int_{-\infty}^{\infty} f(k) e^{i[kz - v_g k \cdot t]} dk = \quad (14.2.22)$$

$$= e^{i(v_g k_0 - \omega_0)t} \psi(z - v_g t, 0) \quad (14.2.23)$$

Berechnet man die Intensität dieser Wellen (also die Energiedichte), so erhält man:

$$|\psi(z, t)|^2 = |\psi(z - v_g t, 0)|^2 \quad (14.2.24)$$

Dies bedeutet, dass sich die Form der Welle in der Zeit nicht verändert, da die gesamte Zeitabhängigkeit in der Ortskoordinate $z \rightarrow z - v_g t$ steckt. Ein Wellenberg der selben Form, wie bei $t = 0$ breitet sich also mit der Gruppengeschwindigkeit v_g im Medium aus. Diese Gruppengeschwindigkeit ist i.A. von der Phasengeschwindigkeit verschieden.

Setzt man höhere Ordnungen der Entwicklung ein, so ergeben sich Terme die zur Deformation des Wellenpaketes führen:

$$\begin{aligned} \psi(z, t) &\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(k) e^{i[kz - (\omega_0 + v_g \cdot (k - k_0) + \gamma(k^2 - 2k_0 k + k_0^2)) \cdot t]} dk = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i(v_g k_0 - \omega_0 - \gamma k_0^2)t} \int_{-\infty}^{\infty} f(k) e^{i[kz - (v_g k + 2k_0 \gamma k + \gamma k^2) \cdot t]} dk = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i(v_g k_0 - \omega_0 - \gamma k_0^2)t} \int_{-\infty}^{\infty} f(k) e^{i[k \cdot (z - \{v_g + 2k_0 \gamma\} \cdot t) + \gamma k^2 \cdot t]} dk \end{aligned}$$

Hier treten also nun Terme $\propto e^{ik^2 t}$ unter dem Fourier-Integral auf, die zu einer (zeitabhängigen) Veränderung der Form des Wellenpaketes führen.

14.3. Lösung der Wellengleichung in leitenden Medien

Bisher wurde nur die Ausbreitung von Wellen in nicht-leitenden Medien besprochen. Dort werden zwar die gebundenen Elektronen der Atome durch die EM-Felder zu Schwingungen angeregt, die Schwingungen sind aber lokal stark eingegrenzt, sodass sich eine Verteilung von lokalisierten Dipolen (und Quadrupolen...) ausbildet. In Leitern

stimmt passiert das selbe. Es gibt aber auch freie Ladungsträger, die sich über weite Strecken bewegen können. Diese Bewegung ist nur durch den elektrischen spezifischen Widerstand σ des Materials beschränkt. Damit gilt neben den Maxwell-Gleichungen noch das **Ohm'sche Gesetz**

$$\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E}. \quad (14.3.1)$$

Hier wird angenommen, dass es sich um einen neutralen, leitenden Körper handelt, sodass die freie Ladungsträgerdichte im Mittel $\rho_{\text{fr}} = 0$ ist. Damit gelten folgende geänderte (im Vergleich zu Abschnitt 14.1) Maxwell-Gleichungen:

$$\epsilon \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad \mu \vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0 \quad (14.3.2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\mu}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 0 \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} - \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi\sigma}{c} \vec{j} = \frac{4\pi\sigma}{c} \cdot \vec{E} \quad (14.3.3)$$

Die Ableitung der Wellengleichungen läuft analog zu Abschnitt 14.1 durch Rotationsbildung:

$$\begin{aligned} 0 &= \vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\mu}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \Delta \vec{E} + \frac{\mu}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{H}) = -\Delta \vec{E} + \frac{\mu}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{4\pi\sigma}{c} \cdot \vec{E} + \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \\ &= -\Delta \vec{E} + \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\mu\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{H} - \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \frac{4\pi\sigma}{c} \cdot \vec{E} \right) = -\Delta \vec{H} - \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \frac{4\pi\sigma}{c} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{E} = \\ &= -\Delta \vec{H} + \left(\frac{\epsilon}{c} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{4\pi\sigma}{c} \right) \left(-\frac{\mu}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right) = -\Delta \vec{H} + \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \frac{\mu\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} \end{aligned}$$

Statt der einfachen Wellengleichungen gelten in Leitern also die **Telegraphengleichungen**:

Satz 14.3 (Telegraphengleichung) In einem Leiter mit den linearen Parametern ϵ, μ und dem spezifischen Ohm'schen Widerstand σ gelten folgende Differentialgleichungen für die Ausbreitung von Wellen:

$$\Delta \vec{E} - \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \frac{\mu\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (14.3.4)$$

$$\Delta \vec{H} - \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \frac{\mu\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0 \quad (14.3.5)$$

$$(14.3.6)$$

Als Lösung kann man wieder den einfachen Ansatz für ebene Wellen verwenden:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \quad \vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{H}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \quad (14.3.7)$$

Es wird sich aber zeigen, dass er nun gedämpfte monochromatische Wellen beschreibt. Setzt man nämlich diesen Ansatz in die Telegraphengleichungen ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta \left[\vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \right] - \left(\frac{4\pi\sigma\mu}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\mu\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left[\vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \right] = \\ &= -k^2 \cdot \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} + \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2} i\omega \cdot \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} + \frac{\mu\epsilon}{c^2} \omega^2 \cdot \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \\ \Rightarrow k^2 - \frac{\epsilon\mu\omega^2}{c^2} - i \frac{4\pi\mu\sigma\omega}{c^2} &= 0 \end{aligned}$$

Damit erhält man folgende Dispersionsrelation:

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \cdot \mu \cdot \left(\epsilon + i \cdot \frac{4\pi\sigma}{\omega} \right) = \frac{\omega^2}{c^2} \cdot n^2 \in \mathbb{C} \quad (14.3.8)$$

Dabei ist jetzt der **Brechungsindex** n eine komplexe Größe:

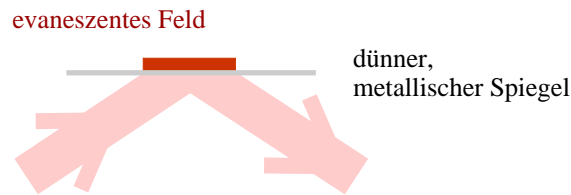
$$n = \sqrt{\epsilon\mu + i \cdot \frac{4\pi\mu\sigma}{\omega}} \in \mathbb{C} \quad (14.3.9)$$

Setzt man nun allgemein $k = k' + i\alpha$ und betrachtet damit die Wellenfunktion, so ergibt sich:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(kz - \omega t)} = \vec{E}_0 e^{-\alpha z} e^{i(k'z - \omega t)}$$

Der hintere Faktor $e^{i(k'z - \omega t)}$ entspricht den üblichen ebenen Wellen. Der vordere Anteil $e^{-\alpha z}$ führt zu einer Dämpfung der Welle, die umso stärker ist, desto weiter das EM-Feld in den Leiter eindringt. Damit ergeben sich interessante Effekte:

- Das EM-Feld kann durch dünne Metallschichten durchdringen, sodass sich auch hinter einem dünnen Spiegel noch Licht messen lässt. Man nennt diese Wellen **evaneszente Wellen**:



- **Skin-Effekt:** Trifft ein EM-Feld auf eine leitende Fläche und ist diese dünn (z.B. dünne Gold-Folie), so dringt das Feld etwas in das Metall ein. Ist das Feld nach der dünnen Leiterschicht noch nicht verschwunden, so wirkt die Folie „durchsichtig“.
- Die Ausbreitung von EM-Wellen in Leitern wird durch den Widerstand des Materials begrenzt. Je niedriger dieser Widerstand ist, desto weiter kann sich die Welle im Medium ausbreiten.

Für die Geometrie der Wellen ergeben sich die gleichen Ergebnisse, wie unter 14.2. Die \vec{E} - und \vec{H} -Felder stehen senkrecht aufeinander und senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung \vec{k} (Wellenvektor). Dies kann man durch explizites Nachrechnen analog zu 14.2 zeigen.

Teil III.

Spezielle Relativitätstheorie

15. Einführung und Relativistische Mechanik

15.1. Postulate und Minkowski-Raum

Es hat sich gezeigt, dass die Newton'sche Mechanik nur in den Grenzen kleiner Geschwindigkeiten (im Vergleich zur Lichtgeschwindigkeit c) gültig ist. Kommt die Größenordnung von v in die Nähe der Lichtgeschwindigkeit, so gilt die relativistische Mechanik, wie sie von Einstein entwickelt wurde. In diesem Skript soll nun die **Einstein'sche spezielle Relativitätstheorie (SRT)** dargestellt werden. Man geht dabei von drei Postulaten aus:

Axiom 15.1 (Konstanz der Lichtgeschwindigkeit) Die Lichtgeschwindigkeit $c \approx 2.99 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ist in allen Bezugssystemen gleich.

Axiom 15.2 (Invarianz der physikalischen Gesetze/Relativitätsprinzip) Die physikalischen Gesetze sind in allen Inertialsystemen gleich. Dies bedeutet es gibt keine ausgezeichneten Bezugssysteme.

Axiom 15.3 (Korrespondenzprinzip) Im Grenzfall $v/c \rightarrow 0$ gehen die relativistischen Gesetze in die Gesetze der klassischen Newton'schen Mechanik über. Die Elektrodynamik ist bereits invariant, da sie die Lichtgeschwindigkeit c explizit enthält. Hier muss also kein Grenzübergang vollzogen werden.

Man betrachtet in der Relativitätstheorie sog. Inertialsysteme und Beziehungen zwischen den Größen in solchen Inertialsystemen. Dabei gilt:

Definition 15.1 (Inertialsystem) Ein Inertialsystem ist ein Bezugssystem (z.B. Koordinatensystem) in dem sich jeder massebehaftete Körper, auf den keine Kraft wirkt, gleichförmig und gerade fortbewegt. Dies bedeutet, dass sich zwei Inertialsysteme K, K' zueinander nur mit einer konstanten Geschwindigkeit \vec{v}_{rel} bewegen können.

Diese Definition impliziert auch, dass es keine absoluten Geschwindigkeiten mehr gibt, da nur Relativgeschwindigkeiten definierbar sind. Es gibt ja nach dem Axiom 15.2 auch kein ausgezeichnetes Bezugssystem, relativ zu dem man eine absolute Geschwindigkeit definieren könnte. Es zeigt sich, dass es günstig ist die Objekte der speziellen Relativitätstheorie nicht mehr im \mathbb{R}^3 zu beschreiben, sondern in einem vierdimensionalen Raum, genannt Minkowski-Raum. Hier wird noch die Zeit t als unabhängige Variable hinzugenommen. Es seien noch einige Definitionen vorausgeschickt:

- Vektoren, deren Indizes oben notiert werden heißen **kontravariant**.
- Vektoren, deren Indizes unten notiert werden heißen **kovariant**.
- **Einstein'sche Summenkonvention:** Tauchen in einer Formel zwei gleiche Indizes auf, von denen einer unten und einer oben steht, so wird implizit über diesen Index summiert (und zwar von 0 bis 3). Summationen, in denen zwei gleiche Indizes oben oder unten stehen sind nicht definiert.

- **Matritzen:** In Matritzen bedeutet der vordere Index die Zeile und der hintere Index die Spalte, also

$$\Lambda_{\text{Zeile, Spalte}} = \begin{pmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} & \dots \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Definition 15.2 (Minkowski-Raum) Der Minkowski-Raum ist ein vierdimensionaler metrischer Vektorraum über den reellen Zahlen \mathbb{R} . Man notiert Elemente des Minkowski-Raumes so:

$$(x^\mu) = \begin{pmatrix} ct \\ \vec{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Auf dem Minkowski-Raum kann man nun eine Metrik einführen, indem man ein Skalarprodukt definiert. Bei der Definition muss man beachten, dass folgendes Längenquadrat invariant unter Wechsel des Bezugssystems ist:

$$s^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = c^2 t^2 - \vec{x}^2.$$

Man definiert also folgendes Skalarprodukt:

$$\langle x, y \rangle = (x^\mu) \cdot (y_\mu) = x^\mu g_{\mu\nu} y^\nu = (x_\mu) \cdot (y^\mu) = x_\mu g^{\mu\nu} y_\nu \quad \text{Komponentenschreibweise} \quad (15.1.1)$$

$$= x^T \mathbf{g} y \quad \text{Vektorschreibweise} \quad (15.1.2)$$

Dabei ist $g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}$ der sog. **metrische Tensor**, der die Geometrie des Raumes festlegt. Es gilt:

$$(g_{\mu\nu}) = (g^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (15.1.3)$$

Es gilt folgende praktische Beziehung:

$$g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} = \delta_\nu^\mu = \begin{cases} 1 & \mu = \nu \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

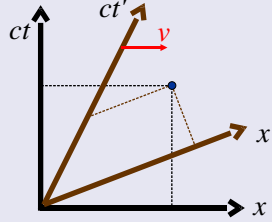
Daraus ergeben sich wichtige Folgerungen:

1. Das Skalarprodukt (und damit die Abstandsnorm) auf dem Minkowski-Raum sind nicht mehr positiv semi-definit, sondern können auch negativ sein.
2. Man kann ko- und kontravariante Vektoren ineinander umrechnen:

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu \quad x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu$$

15.2. Lorentz-Transformation

Definition 15.3 (Lorentz-Transformation) Zwei Inertialsysteme K, K' bewegen sich zueinander mit einer relativen Geschwindigkeit, v , bzw. $\beta \equiv \frac{v}{c}$ (o.B.d.A in x -Richtung). Man betrachtet das System K als ruhend, während sich K' bewegt.



Die Frage lautet nun, wie der Vektor x^μ im System K im System K' aussieht (dort Vektor x'^μ). Diese Transformation erfolgt über die sog. **Lorentz-Transformation** $\Lambda(\beta)^\mu_\nu$ mit

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \quad \text{und} \quad x'_\mu = g_{\mu\nu} x'^\nu = x_\beta [\Lambda^{-1}]^\beta_\mu. \quad (15.2.1)$$

Es handelt sich hierbei um eine Gruppe linearer Transformationen, die explizit die Lichtgeschwindigkeit c als obere Grenze enthalten. Sie ersetzen die Galilei-Transformationen der klassischen Mechanik. Man definiert für eine Relativbewegung in x -Richtung:

$$(\Lambda(\beta)^\mu_\nu) = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c} \quad (15.2.2)$$

Damit erhält man sofort auch die Matrix-Darstellung der Rücktransformation ($\beta \rightarrow -\beta$):

$$([\Lambda^{-1}]^\mu_\nu) = g_{\mu\beta} \Lambda^\beta_\gamma g^{\gamma\nu} = (\Lambda(-\beta)^\mu_\nu) = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (15.2.3)$$

Es gibt noch eine alternative Darstellung, die nicht mit β , sondern mit dem sog. **Boost-Parameter** α (**Rapidity**) parametrisiert:

$$(\Lambda(\alpha)^\mu_\nu) = \begin{pmatrix} \cosh \alpha & \sinh \alpha & 0 & 0 \\ \sinh \alpha & \cosh \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \cosh \alpha = \gamma, \quad \sinh \alpha = -\beta\gamma, \quad \tanh \alpha = -\beta \quad (15.2.4)$$

Die Bedeutung des Boost-Parameters wird bei der Geschwindigkeitsaddition in 15.4.1 klar. Man kann nun explizit die Transformation angeben:

$$\begin{aligned} ct' &= \gamma(ct - \beta x) & y' &= y \\ x' &= \gamma(x - \beta ct) & z' &= z \end{aligned} \quad (15.2.5)$$

Für die Transformationsmatrix gilt:

$$\Lambda^\mu_\alpha g_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\beta = g_{\alpha\beta} \quad (15.2.6)$$

Man kann nun noch verifizieren, dass das Längenquadrat tatsächlich invariant bleibt:

$$\begin{aligned} (ct')^2 - x'^2 &= \gamma^2 [(ct - \beta x)^2 - (x - \beta ct)^2] = \gamma^2 [c^2 t^2 - 2ct\beta x + \beta^2 x^2 - x^2 + 2x\beta ct - \beta^2 c^2 t^2] = \\ &= \gamma^2 (1 - \beta^2) c^2 t^2 + \gamma^2 (\beta^2 - 1) x^2 = c^2 t^2 - x^2 \end{aligned}$$

Man kann nun die Klasse der sog. Vierervektoren definieren:

Definition 15.4 (Vierervektoren) Jede vierdimensionale Größe

$$(a^\mu) = \begin{pmatrix} a^0 \\ a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix}$$

die sich wie ein Minkowski-Ortsvektor unter Lorentz-Transformationen verhält heißt Vierer-Vektor. Insbesondere sind somit die Längenquadrate von Vierervektoren invariant unter Lorentz-Trafos:

$$a^\mu a_\mu = a'^\nu a'_\nu$$

Als Beispiel für das Transformationsverhalten eines Vektor betrachtet man noch das Analogon zum $\vec{\nabla}$ -Operator. Man definiert ihn als $(\partial_\mu) := \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla} \right)$. Um das Transformationsverhalten zu ermitteln, rechnet man:

$$\begin{aligned} \partial_\mu f(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3) &= \frac{\partial}{\partial x^\mu} f(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3) = \left[\frac{\partial}{\partial x'^\nu} f(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3) \right] \cdot \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} = \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial x'^\nu} f(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3) \right] \Lambda^\nu_\mu = \left(\Lambda^\nu_\mu \frac{\partial}{\partial x'^\nu} \right) f(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3) = \\ &= (\Lambda^\nu_\mu \partial'_\nu) f(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3) \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich also:

Satz 15.1 (Ableitungsoperator) Man definiert das Analogon zum $\vec{\nabla}$ -Operator im Minkowski-Raum als:

$$(\partial_\mu) := \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla} \right) \quad (15.2.7)$$

Dieser Vektor transformiert wie ein kovarianter Vektor:

$$\partial'_\mu = \partial_\nu (\Lambda^{-1})^\nu_\mu$$

Der zugehörige kontravariante Vektor lautet also:

$$(\partial^\mu) := \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla} \right) \quad (15.2.8)$$

Mit Hilfe des Operators ∂_μ kann man nun auch den relativistischen d'Alembert-Operator definieren:

Satz 15.2 (d'Alembert-Operator)

$$\square \equiv \partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \quad (15.2.9)$$

Dieser Operator ist ein Lorentz-Skalar, also invariant unter Lorentz-Trafos.

Neben Vektoren, die sich lorentzkovariant verhalten kann man auch Objekte höherer Dimension mit dem selben Transformationsverhalten definieren. Man nennt ein mathematisches Objekt, das mit k Indizes versehen ist einen **Tensor k -ter Stufe**. Damit erhält man folgende Beispiele:

Tensor 0. Stufe: Skalar, Tensor 1. Stufe: Vektor, Tensor 2. Stufe: Matrix usw.

Nun definiert man kontravariante Tensoren als:

Definition 15.5 (Kontra-, kovariante und gemischte Tensoren k -ter Stufe)

- Eine k -fach indizierte Größe $T^{\alpha_1 \dots \alpha_k}$ (alle Indizes oben) heißt **vollständig kontravarianter Tensor k -ter Stufe**, falls sie sich unter Lorentz-Transformationen wie folgt verhält:

$$T'^{\alpha_1 \dots \alpha_k} = \Lambda^{\alpha_1}_{\beta_1} \dots \Lambda^{\alpha_k}_{\beta_k} T^{\beta_1 \dots \beta_k} \quad (15.2.10)$$

- Daraus kann man den einen **vollständig kovarianten Tensor k -ter Stufe** konstruieren:

$$T_{\alpha_1 \dots \alpha_k} = g_{\alpha_1 \beta_1} \dots g_{\alpha_k \beta_k} T^{\beta_1 \dots \beta_k} \quad (15.2.11)$$

Sein Transformationsverhalten unter Lorentz-Trafos ist:

$$T'_{\alpha_1 \dots \alpha_k} = T_{\beta_1 \dots \beta_k} [\Lambda^{-1}]^{\beta_1}_{\alpha_1} \dots [\Lambda^{-1}]^{\beta_k}_{\alpha_k} \quad (15.2.12)$$

- Man kann auch **gemischte Tensoren** definieren, bei denen einige Größen oben und einige unten stehen (Beispiel $k = 2$):

$$T^{\alpha}_{\beta} = T^{\alpha\gamma} g_{\gamma\beta} = g^{\alpha\gamma} T_{\gamma\beta} \quad T^{\beta}_{\alpha} = g_{\alpha\gamma} T^{\gamma\beta} = T_{\alpha\gamma} g^{\gamma\beta} \quad (15.2.13)$$

Ihr Transformationsverhalten ist:

$$T'^{\alpha}_{\beta} = T'^{\alpha\gamma} g_{\gamma\beta} = \Lambda^{\alpha}_{\nu} \Lambda^{\gamma}_{\nu} T^{\mu\nu} g_{\gamma\beta} = \Lambda^{\alpha}_{\nu} \Lambda^{\gamma}_{\nu} T^{\mu}_{\epsilon} g^{\epsilon\nu} g_{\gamma\beta} = \quad (15.2.14)$$

$$= \Lambda^{\alpha}_{\mu} T^{\mu}_{\epsilon} [\Lambda^{-1}]^{\epsilon}_{\beta} \quad (15.2.15)$$

Auf Tensoren k -ter Stufe sind einige algebraische Operationen definiert:

- **Komponentenweise Addition:** Die Größe $aA^{\alpha_1 \dots \alpha_n} + bB^{\alpha_1 \dots \alpha_n}$ ist ein kontravarianter Tensor n -ter Stufe, wenn a und b Lorentz-Skalare sind.
- **Multiplikation:** Die Größe $A^{\alpha_1 \dots \alpha_n} B^{\beta_1 \dots \beta_m}$ ist ein kontravarianter Tensor $(n + m)$ -ter Stufe.
- **Verjüngung:** Die Größe $A^{\alpha_1 \dots \alpha_n}_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_m \gamma_1 \dots \gamma_r}$ ist ein kontravarianter Tensor $(n + r)$ -ter Stufe. Dabei war A $(n + 2 + r)$ -ter Stufe. Die Dimension des Tensors wird so also um die Anzahl 2 der gleichgesetzten Indizes verringert. Ein Beispiel ist die Spurbildung eines Tensors 2-ter Stufe: $\text{Spur}(A^{\mu}_{\nu}) = A^{\mu}_{\mu}$.

Man kann die Definition von Tensoren noch auf Tensorfelder erweitern:

Definition 15.6 (Kontravariantes Tensorfeld) Ein kontravariantes Tensorfeld k -ter Stufe ist die Gesamtheit $T^{\alpha_1 \dots \alpha_k}(x^{\mu})$ der k -fach indizierten Funktionen des kontravarianten Parametervektors (x^{μ}) . Das Transformationsverhalten ist definiert durch:

$$T'^{\alpha_1 \dots \alpha_k}(x^{\mu}) = \Lambda^{\alpha_1}_{\beta_1} \dots \Lambda^{\alpha_k}_{\beta_k} T^{\beta_1 \dots \beta_k}([\Lambda^{-1}]^{\mu}_{\nu} x^{\nu}) = \Lambda^{\alpha_1}_{\beta_1} \dots \Lambda^{\alpha_k}_{\beta_k} T^{\beta_1 \dots \beta_k}(x^{\mu}) \quad (15.2.16)$$

Hier ist vor Allem auf das Transformationsverhalten des Parameters zu achten.

15.3. Minkowski-Diagramme

In der SRT erweist es sich als nützlich sog. **Minkowski-Diagramme** zu benutzen, um die Sachverhalte darzustellen. Ein solches Minkowski-Diagramm ist ein Raum-Zeit-Diagramm und bezieht sich auf den Spezialfall der Bewegung in x -Richtung (oder entlang jeder beliebigen Koordinatenachse). Es hat folgenden Aufbau:

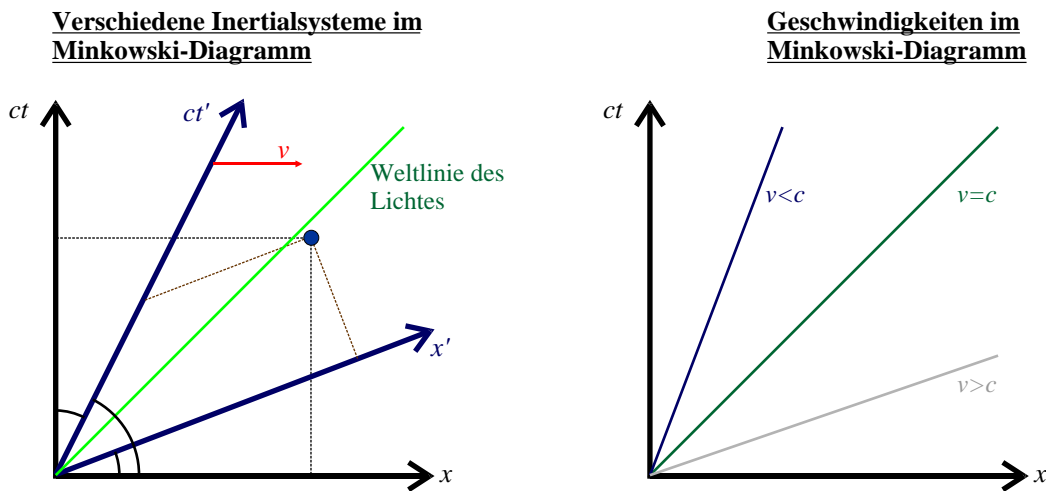


Abb. 15.1.: Minkowski-Diagramm

Dabei gelten folgende Punkte:

1. Das System $K' = (x', ct')$ bewegt sich mit v relativ zu $K = (x, ct)$ in positiver x -Richtung.
2. Die Weltlinie eines Photons ($v = c$) ist in allen Diagrammen gleich.
3. Der Ursprung von K' beschreibt in K folgende Ortskurve: $x = v \cdot t$. Daraus ergibt sich $ct = \frac{c}{v} \cdot x$. Damit ist aber die Winkel ϕ und θ festgelegt:

$$\tan \phi = \frac{u}{c} = \beta, \quad \theta = \frac{\pi}{2} - \phi$$

Es bleibt noch die Frage, wie die Koordinatenachsen der zwei Diagramme zu normieren sind. Dazu benutzt man die Invarianz der Längenquadrate von Vierervektoren:

$$c^2 t^2 - x^2 = c^2 t'^2 - x'^2 = s^2, \quad s = \text{const}$$

Nun betrachtet man zwei Spezialfälle:

1. $s^2 = 1$: Damit gilt:

$$ct = \sqrt{x^2 + 1} \quad \text{und} \quad ct' = \sqrt{x'^2 + 1}$$

Die Kurve $ct = \sqrt{x^2 + 1}$ schneidet die ct -Achse für $x = 0$ in $ct = 1$. In einem beliebigen anderen Bezugssystem schneidet sie die ct' -Achse bei $x' = 0$ in $ct' = 1$. Damit überträgt diese Kurve den Zeitmaßstab von System zu System.

2. $s^2 = -1$: Damit gilt:

$$ct = \sqrt{x^2 - 1} \quad \text{und} \quad ct' = \sqrt{x'^2 - 1}$$

Diese Kurven schneiden die x -Achse bei $x = 1$ zum Zeitpunkt $ct = 0$. Dies gilt wieder in allen Bezugssystemen, sodass sie den Längenmaßstab von System zu System übertragen.

Man erhält damit:

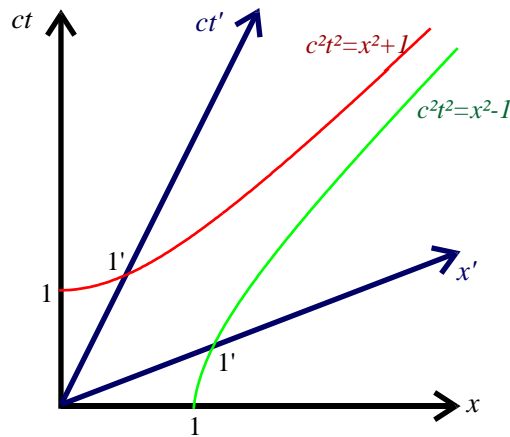


Abb. 15.2.: Normiertes Minkowski-Diagramm

Man kann nun verschiedene Arten von Vektoren im Minkowski-Diagramm unterscheiden. Es sind jeweils die Vektoren mit Endpunkten in den drei markierten Bereichen in Abb. 15.3.

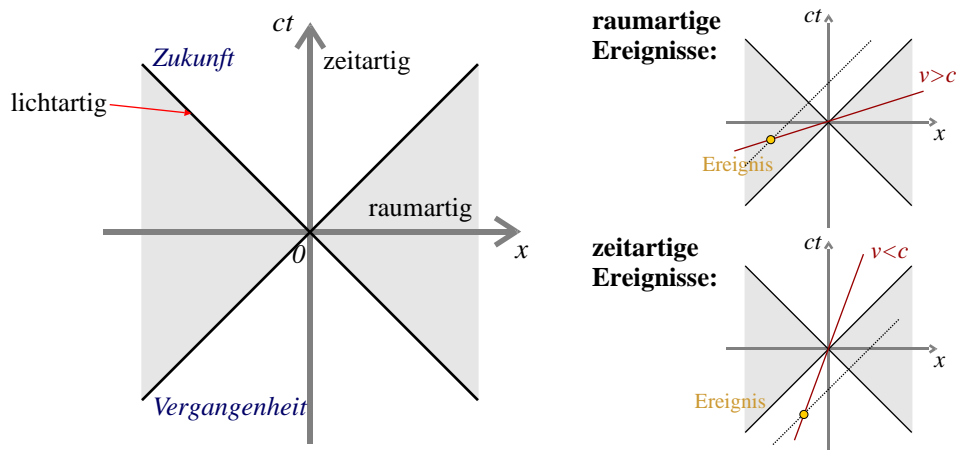


Abb. 15.3.: Einteilung der Bereiche im Minkowski-Raum (zwei Dimensionen unterdrückt)

Man unterscheidet in Abb. 15.3 drei Bereiche:

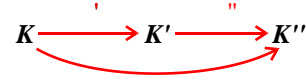
1. Alle Weltlinien, die auf den Winkelhalbierenden (oder parallel dazu) liegen sind **zeitartig**. Es handelt sich dabei um Teilchen oder Ereignisse, die sich mit Lichtgeschwindigkeit c bewegen.
2. Die Weltlinien im grauen, **raumartigen** Bereich repräsentieren Ereignisse, die keinen kausalen Zusammenhang mit einem Ereignis im Ursprung 0 haben, da sie sich auch mit Lichtgeschwindigkeit nicht rechtzeitig bis zum Ursprung ausbreiten können.
3. Die Weltlinien innerhalb des hellen Kegels repräsentieren **zeitartige** Ereignisse. Diese können in einem kausalen Zusammenhang mit 0 stehen, da sie diesen mit $\dot{x} < c$ erreichen, oder von ihm erreicht werden können. Dies bedeutet, dass Ereignisse aus der Vergangenheit auf 0 wirken können und zukünftige Ereignisse von 0 beeinflusst werden können.

15.4. Einfache Folgerungen aus der Lorentz-Trafo

Aus der Lorentz-Transformation kann man sofort einige einfach und grundlegende Beziehungen folgern:

15.4.1. Geschwindigkeitsaddition

Man betrachtet drei Bezugssysteme K, K', K'' . Dabei ruht K . K' bewegt sich mit v_1 relativ zu K . Das System K'' bewegt sich dann mit v_2 relativ zu K' . Man fragt nun nach der Geschwindigkeit, mit der sich der Ursprung von K'' im System K bewegt. Sie wird mit v_{12} bezeichnet. Im nicht-relativistischen Fall ist dies einfach $V_{12} = v_1 + v_2$. Dies entspricht der Situation, bei der jemand aus einem fahrenden Zug einen Ball nach vorne wirft. Dieser hat ja schon die Grundgeschwindigkeit des Zuges v_1 und erhält so eine zusätzliche Geschwindigkeit v_2 . Im relativistischen Fall ist dies komplizierter. Der Ansatz ist aber einfach. Um vom System K ins System K'' zu gelangen gibt es zwei Wege (siehe Abbildung rechts): Zum einen direkt über eine Lorentz-Trafo Λ . Zum anderen über das System K' als Zwischenschritt, also mit $\Lambda' \Lambda''$. Damit muss man aber diese zwei Ausdrücke nur gleichsetzen. Es gilt also (die unbenutzten Dimensionen y, z werden weggelassen):



$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \Lambda' \Lambda'' = \begin{pmatrix} \gamma' & -\beta'\gamma' \\ -\beta'\gamma' & \gamma' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma'' & -\beta''\gamma'' \\ -\beta''\gamma'' & \gamma'' \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \gamma'\gamma'' + \beta'\beta''\gamma'\gamma'' & -\gamma'\gamma''\beta' - \gamma'\gamma''\beta'' \\ -\gamma'\gamma''\beta' - \gamma'\gamma''\beta'' & \gamma'\gamma'' + \beta'\beta''\gamma'\gamma'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma'\gamma''(1 + \beta'\beta'') & -\gamma'\gamma''(\beta' + \beta'') \\ -\gamma'\gamma''(\beta' + \beta'') & \gamma'\gamma''(1 + \beta'\beta'') \end{pmatrix}$$

Daraus ergeben sich zwei Gleichungen:

$$\gamma = \gamma'\gamma''(1 + \beta'\beta'')$$

$$-\beta\gamma = -\gamma'\gamma''(\beta' + \beta'') \stackrel{!}{=} -\beta\gamma'\gamma''(1 + \beta'\beta'')$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{\beta' + \beta''}{1 + \beta'\beta''}$$

Man erhält also als Endergebnis:

Satz 15.3 (Relativistische Geschwindigkeitsaddition) Ein System K' bewege sich relativ zum Ruhesystem K mit $\beta' = \frac{v_1}{c}$. Ein weiteres System K'' bewege sich relativ zu K' mit $\beta'' = \frac{v_2}{c}$. Die Geschwindigkeit, mit der sich K'' relativ zu K bewegt ist dann mit $\beta = \frac{v_{12}}{c}$:

$$\beta = \frac{\beta' + \beta''}{1 + \beta'\beta''} \qquad v_{12} = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}} \quad (15.4.1)$$

Im Grenzfall $\beta' \approx \beta'' \ll 1$ folgt wieder $v_{12} = v_1 + v_2$. Ist nun weiter die Geschwindigkeit von K'' ein Vektor $\vec{v}_2 = (v_{2x}, v_{2y}, v_{2z})$ und bewegt sich K' weiterhin parallel zur x -Achse ($\vec{v}_1 = (v_{1x}, 0, 0)$), so gilt noch:

$$v_{12y} = \frac{v_{2y} \sqrt{1 - \frac{v_{1x}^2}{c^2}}}{1 + \frac{v_{1x} v_{2x}}{c^2}} \qquad v_{12z} = \frac{v_{2z} \sqrt{1 - \frac{v_{1x}^2}{c^2}}}{1 + \frac{v_{1x} v_{2x}}{c^2}} \quad (15.4.2)$$

Der Boostparameter α einer Lorentz-Trafo lässt sich schreiben als $\beta = -\tanh \alpha$. Setzt man dies in (15.4.1) ein, so erhält man:

$$-\tanh \alpha = -\frac{\tanh \alpha' + \tanh \alpha''}{1 + \tanh \alpha' \cdot \tanh \alpha''} \quad (15.4.3)$$

Der rechte Teil dieser Formel entspricht aber gerade dem Additionstheorem für den Tangens-Hyperbolicus, sodass man $\tanh \alpha = \tanh(\alpha' + \alpha'')$. Man kann damit folgern, dass sich die Rapidity α , im Gegensatz zur Geschwindigkeit \vec{v} , bzw. $\vec{\beta}$ additiv verhält.

15.4.2. Zeitdilatation

Ein Beobachter im Ruhesystem K lässt zu den Zeitpunkten t_1 und t_2 am Ort $x = 0$ zwei Lichtblitze los. Ein weiterer Beobachter im bewegten System K' (Relativgeschwindigkeit v) beobachtet diese zu den Zeitpunkten t'_1 und t'_2 . Es gilt mit (15.2.5):

$$ct'_1 = \gamma ct_1 \qquad ct'_2 = \gamma ct_2$$

Daraus ergibt sich für die Zeitdifferenz:

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = \gamma(t_2 - t_1) = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \beta^2}} > \Delta t \quad (15.4.4)$$

Da $\gamma > 1$ gilt verlängert sich ein Zeitintervall für den sich bewegenden Beobachter. Man kann die skurz zusammenfassen:

Uhren in bewegten Systemen gehen langsamer.

Der Vorgang stellt sich so in einem Minkowski-Diagramm dar:

Zeitdilatation:

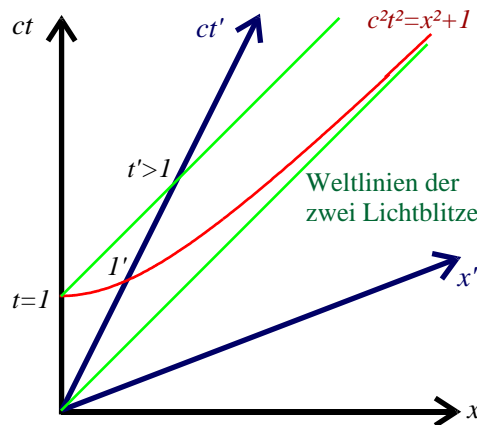


Abb. 15.4.: Zeitdilatation im Minkowski-Diagramm

Die zwei Lichtblitze sind eingezeichnet (grüne Weltlinien). Die Zeiten t und t' ergeben sich aus den Schnittpunkten mit den Koordinatenachsen.

15.4.3. Längenkontraktion

Im Ruhesystem K befindet sich ein Stab der Länge Δl ($x_1 = 0, x_2 = \Delta l$) längs der x -Achse. Ein mit v vorbeifliegender Beobachter misst die Länge des Stabes in seinem System, indem er Anfang und Ende des Stabes zur gleichen Zeit bestimmt. Es gilt für die Raum-Zeitpunkt des Stabes in K' :

$$x'_1 = \gamma(0 - \beta ct_1) \quad x'_2 = \gamma(\Delta l - \beta ct_2) \quad ct'_1 = \gamma(ct_1 - 0) \quad ct'_2 = \gamma(ct_2 - \beta \Delta l)$$

Im System K' soll die Messung gleichzeitig erfolgen, also $t'_1 = t'_2$. Es ergibt sich dann:

$$\begin{aligned} \Delta l' &= x'_2(t') - x'_1(t') = \gamma(x_2 - x_1 - \beta c(t_2 - t_1)) & ct_2 - ct_1 &= ct_2 - \frac{ct'_1}{\gamma} = \frac{c \overbrace{(t'_2 - t'_1)}^{=0}}{\gamma} + \beta \Delta l = \beta \Delta l \\ \Rightarrow \Delta l' &= \gamma(x_2 - x_1 - \beta \Delta l) = \gamma(\Delta l - \beta^2 \Delta l) = \frac{1 - \beta^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \Delta l \end{aligned}$$

Insgesamt gilt also:

$$\Delta l' = \frac{\Delta l}{\gamma} = \sqrt{1 - \beta^2} \cdot \Delta l < \Delta l \quad (15.4.5)$$

Dies bedeutet der bewegte Beobachter misst eine kürzere Länge, als der ruhende, oder auch andersrum:

Bewegte Maßstäbe erscheinen kürzer.

Das ganze stellt sich so im Minkowski-Diagramm dar:

Längenkontraktion:

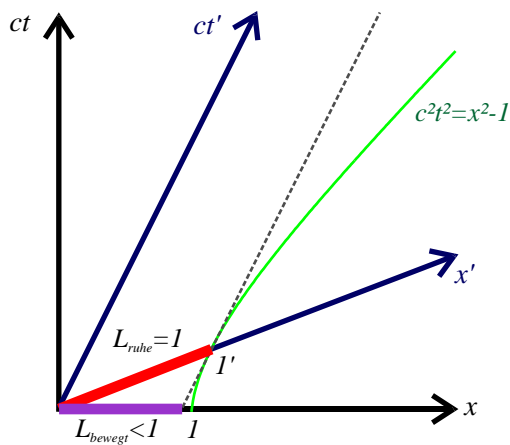


Abb. 15.5.: Längenkontraktion im Minkowski-Diagramm

Man sieht die Weltlinien des Anfangs- und Endpunktes des Maßstabes. In seinem Ruhesystem K' ist er $\Delta t = 1$ LE lang. Im Ruhesystem des Beobachters (K) ist er $\Delta l < 1$ LE lang.

16. Lorentzkovariante Formulierung der relativistischen Mechanik

In diesem Abschnitt soll die Lorentzkovariante Formulierung der Mechanik vorgestellt werden. Dies bedeutet, dass man eine Form der mechanischen Gesetze findet, die im nicht-relativistischen Grenzfall in die Newton'schen Gesetze übergeht und zusätzlich invariant unter Lorentz-Trafos ist.

In der nicht-relativistischen Mechanik tritt das Differential $\frac{dx}{dt} = \dot{x}$ auf. Dieses lässt sich auch so (mit dem Vierer-Ortsvektor) formulieren: $\frac{dx^\mu}{dx^0}$. Es zeigt sich nun aber, dass diese Größe nicht Lorentz-invariant ist. Um die Mechanik aber Lorentz-invariant zu formulieren macht es sicher Sinn zunächst eine Form dieses Differentials zu finden, die Lorentz-invariant ist. Da x^μ ein zeitartiger Vektor ist, gibt es sicher immer ein Koordinatensystem, in dem er *momentan* ruht. Dort gilt dann sicher auch $dx'^\mu = (cd\tau, 0, 0, 0)$. Der Vektor bewegt sich dort also nur in der Zeit, bleibt aber am selben Ort (ruht). Man nennt die Zeit in diesem System *Eigenzeit*. Da nun dx^μ ein Vierervektor ist, bleibt auch sein Längenquadrat erhalten, sodass man erhält:

$$dx^\mu dx_\mu = c^2 dt^2 - d\vec{x}^2 = dx'^\mu dx'_\mu = c^2 d\tau^2 > 0 \quad (16.1)$$

Man erhält also zusammenfassend folgenden Satz:

Satz 16.1 (Eigenzeitdifferential $d\tau$) Das Eigenzeitdifferential erhält man aus (16.1) zu:

$$d\tau = dt \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{d\vec{x}}{dt} \right)^2} = dt' \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{d\vec{x}'}{dt'} \right)^2}. \quad (16.2)$$

Dieses Eigenzeitdifferential ist ein Lorentz-Skalar, also invariant unter Lorentz-Trafo. Es gibt die Zeitskala im Ruhesystem des bewegten Objektes an.

Dividiert man die Beziehung (16.1) durch $d\tau^2$, so ergibt sich:

$$\frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx_\mu}{d\tau} = \frac{dx'^\mu}{d\tau} \frac{dx'_\mu}{d\tau} = c^2$$

Die so erhaltene Differentialform ist also invariant unter Lorentz-Trafos und man kann nun definieren:

Definition 16.1 (Vierergeschwindigkeit)

$$(u^\mu) = \frac{d}{d\tau} (x^\mu) = \left(\frac{d(x^\mu)}{dt} \right) \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\dot{\vec{x}}^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} c \\ \dot{\vec{x}} \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} c \\ \dot{\vec{x}} \end{pmatrix} \quad (16.3)$$

Der Betrag dieses Vektors lässt sich im Ruhesystem ($\gamma = 1, \dot{\vec{x}} = 0$) berechnen:

$$u^\mu u_\mu = c^2 \quad (16.4)$$

Man stellt fest, dass die Division einer beliebigen Vierergröße durch einen Lorentz-Skalar wieder auf eine Vierergröße führt. Man kann dann auch noch die anderen Größen der Mechanik als Vierervektoren definieren:

Definition 16.2 (Viererimpuls, geschwindigkeitsabhängige Masse)

$$(p^\mu) = m_0 \cdot (u^\mu) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{\dot{\vec{x}}^2}{c^2}}} \frac{d}{dt} (x^\mu) = \begin{pmatrix} cm \\ \vec{p} \end{pmatrix} = \gamma m_0 \begin{pmatrix} c \\ \dot{\vec{x}} \end{pmatrix} \quad (16.5)$$

Dabei ist $\vec{p} = m\dot{\vec{x}}$ der physikalische Impuls. Die Größe m_0 ist ein Lorentz-Skalar und entspricht der Masse des Teilchens gemessen in seinem Ruhesystem. Man kann dann

$$m \equiv m(\dot{\vec{x}}) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{\dot{\vec{x}}^2}{c^2}}} \quad (16.6)$$

als geschwindigkeitsabhängige, relativistische Masse des bewegten Körpers auffassen. Im folgenden wird m (ohne Index) die geschwindigkeitsabhängige Masse und m_0 die Ruhemasse eines Teilchens bezeichnen.

Der Betrag des Viererimpulses ergibt sich im Ruhesystem zu:

$$p^\mu p_\mu = m_0^2 c^2 \quad (16.7)$$

Definition 16.3 (Viererkraft)

$$(F^\mu) = \frac{d}{d\tau} (p^\mu) = \gamma \frac{d}{dt} (p^\mu) = \gamma \begin{pmatrix} c \frac{dm}{dt} \\ \vec{F} \end{pmatrix}, \quad \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (16.8)$$

Es gilt außerdem:

$$p_\mu F^\mu = 0 \quad (16.9)$$

Die Kraft steht also stets senkrecht auf dem Impuls. Die zeitliche Komponente der Viererkraft beschreibt die zeitliche Änderung der kinetischen Energie des bewegten Teilchens.

Die Beziehung (16.9) muss noch nachgewiesen werden. Man betrachtet dazu:

$$\text{Einerseits: } \frac{d}{d\tau} p_\mu p^\mu = \frac{d}{d\tau} m_0^2 c^2 = 0$$

$$\text{Andererseits: } \frac{d}{d\tau} p_\mu p^\mu = F_\mu p^\mu = p_\mu F^\mu$$

Vergleicht man diese beiden Ergebnisse, so ergibt sich sofort (16.9).

Nun kann man (16.9) verwenden, um den zeitlichen Anteil der Viererkraft zu interpretieren. Der räumliche Anteil ist ja einfach die nicht-relativistische Kraft \vec{F} multipliziert mit dem Vorfaktor γ , in dem die Geschwindigkeit des bewegten Objektes, auf das die Kraft wirkt auftaucht. Es ergibt sich nun:

$$\begin{aligned} 0 &= p_\mu F^\mu = p_0 F^0 + p_1 F^1 + p_2 F^2 + p_3 F^3 \\ \Rightarrow p_0 F^0 &= -p_1 F^1 - p_2 F^2 - p_3 F^3 = -\gamma \vec{p} \cdot \vec{F} = \gamma^2 m_0 \vec{v} \cdot \vec{F} \\ \Rightarrow F^0 &= \frac{\gamma^2 m_0 \vec{v} \cdot \vec{F}}{p_0} = \frac{\gamma^2 m_0 \vec{v} \cdot \vec{F}}{\gamma m_0 c} = \gamma \frac{\dot{\vec{x}}}{c} \cdot \vec{F} \end{aligned}$$

Für die klassische Leistung gilt im potentialfreien Raum ($V(\vec{x}) = 0$)

$$P = -\vec{F} \cdot \dot{\vec{x}} = -m\ddot{\vec{x}} \cdot \dot{\vec{x}} = \frac{dE}{dt},$$

sodass die zeitliche Komponente der Viererkraft gerade die Änderung der Energie E des Körpers entspricht. Im Potentialfreien Raum ($V(\vec{x}) = 0$) gilt $\dot{E} = \dot{T}$. Dabei ist $T = \frac{m\dot{\vec{x}}^2}{2}$ die kinetische Energie des Körpers. Man kann dann zwei Formen der zeitlichen Komponente aufschreiben:

$$F^0 = \frac{dp^0}{d\tau} = \gamma \dot{p}^0 = \frac{\gamma}{c} \dot{T}$$

Daraus erhält man dann (durch integrieren im zweiten Schritt):

$$cp^0 = T \quad \Rightarrow \quad cp^0 = T + k, \quad k = \text{const}$$

Setzt man nun noch $p^0 = -\gamma m_0 c$ ein, so erhält man:

$$T = \gamma m_0 c^2 - ck$$

Nun kann man noch k bestimmen, da ja $T = 0$ für $v = 0$ gelten muss. Dies liefert $k = m_0 c$. Man erhält dann:

Satz 16.2 (Kinetische Energie) Die relativistische, kinetische Energie T ist:

$$T = (\gamma - 1)m_0 c^2 = \gamma m_0 c^2 - m_0 c^2 = mc^2 - m_0 c^2 \quad (16.10)$$

Man kann die Formel so interpretieren, dass ein Körper selbst in Ruhe noch eine Energie $E_0 = m_0 c^2$ (**Ruhenergie**) besitzt. Die Gesamtenergie des Körpers ist dann:

$$E = mc^2 \quad \Rightarrow \quad T = E - E_0 \quad (16.11)$$

Dieser Satz impliziert noch die folgende Schreibweise für den Viererimpuls:

$$(p^\mu) = \begin{pmatrix} E/c \\ \vec{p} \end{pmatrix} \quad (16.12)$$

Da nun aber der Viererimpuls ein Vierervektor ist, also sein Längenquadrat Lorentz-invariant ist und somit gleich seinem Betrag im Ruhesystem, folgt:

$$m_0^2 c^4 = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2$$

Daraus ergibt sich dann:

Satz 16.3 (relativistische Energie-Impuls-Beziehung)

$$E^2 = \vec{p}^2 c^2 + m_0^2 c^4 = \text{const} \quad (16.13)$$

Zum Schluss soll noch angeführt werden:

Satz 16.4 (relativistische Energieerhaltung in konservativen Feldern)

$$mc^2 + V(\vec{x}) = m_0 c^2 + T + V(\vec{x}) = E_{\text{ges}} = \text{const} \quad (16.14)$$

Damit hat man also alle wichtigen Beziehungen der Mechanik in lorentzkovarianter Form geschrieben: Impuls, Kraft, Geschwindigkeit, Energie, Energieerhaltung. Im nächsten Kapitel soll nun noch die relativistische Lagrange-Formulierung der Mechanik entwickelt werden.

16.1. Beispiel: Massendefekt

Man betrachte einen ruhenden Atomkern der Ruhemasse M_0 . Er zerfalle in zwei leichtere Kerne der Ruhemassen m_a, m_b . Die Zerfallsprodukte können jeweils einen Impuls tragen, müssen also nicht mehr ruhen. Nur die Gesamtimpulserhaltung muss gewährleistet bleiben. Man kann also ansetzen:

$$(p^\mu) = \begin{pmatrix} Mc \\ \vec{0} \end{pmatrix} \quad (p_a^\mu) = \begin{pmatrix} p_{a0} \\ \vec{p}_a \end{pmatrix} \quad (p_b^\mu) = \begin{pmatrix} p_{b0} \\ \vec{p}_b \end{pmatrix}$$

Es gilt Impulserhaltung. Dies liefert zwei Gleichungen:

$$p_{a0} + p_{b0} = Mc$$

$$\vec{p}_a + \vec{p}_b = \vec{0}$$

Außerdem gilt für jedes der Zerfallsprodukte, dass die Länge des Impulsvierervektors erhalten bleibt. Speziell im jeweiligen Ruhesystem ($\vec{v} = 0$) ist diese $p'^\mu p'_\mu = m_0^2 c^4$. Damit ergeben sich zwei weitere Gleichungen:

$$\begin{aligned} p_{a0}^2 - \vec{p}_a^2 &= m_a^2 c^4 \\ p_{b0}^2 - \vec{p}_b^2 &= m_b^2 c^4 \end{aligned}$$

Subtrahiert man diese beiden Gleichungen, so ergibt sich:

$$p_{a0}^2 - p_{b0}^2 - \underbrace{\vec{p}_a^2 + \vec{p}_b^2}_{\vec{p}_a = -\vec{p}_b} = p_{a0}^2 - p_{b0}^2 = (m_a^2 - m_b^2) c^4$$

Man kann dies noch etwas umschreiben:

$$p_{a0}^2 - p_{b0}^2 = (p_{a0} + p_{b0})(p_{a0} - p_{b0}) = Mc(p_{a0} - p_{b0}) = (m_a^2 - m_b^2) c^4$$

Daraus erhält man dann durch Umstellen und unter Benutzung von $p_{a0} + p_{b0} = Mc$:

$$\begin{aligned} p_{a0} &= \frac{c}{2M} (M^2 + m_a^2 - m_b^2) = \frac{E_a}{c} \\ p_{b0} &= \frac{c}{2M} (M^2 - m_a^2 + m_b^2) = \frac{E_b}{c} \end{aligned}$$

Aus der Energieerhaltung erhält man:

$$\frac{E_a}{c} + \frac{E_b}{c} = \sqrt{m_a^2 c^2 + \vec{p}_a^2} + \sqrt{m_b^2 c^2 + \vec{p}_b^2} = \sqrt{m_a^2 c^2 + \vec{p}_a^2} + \sqrt{m_b^2 c^2 + \vec{p}_a^2} = Mc$$

Aus dieser Gleichung kann man aber mit $\vec{p}_a^2 > 0$ ablesen, dass

$$M > m_a + m_b$$

Der zerfallende Kern muss also eine größere Masse haben als beide Zerfallsprodukte zusammen. Die Massendifferenz $M - m_a - m_b$ wird in kinetische Energie umgesetzt, sodass die Zerfallsprodukte auseinander fliegen.

16.2. Beispiel: Compton-Effekt

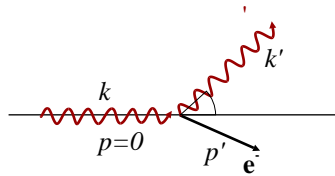


Abb. 16.1.: Compton-Effekt

Ein Photon mit Impuls \vec{k} (Ruhemasse $m_{ph} = 0$, Energie $E_{ph} = c|\vec{k}|$) treffe auf ein ruhendes Elektron $\vec{p} = 0$, $m_e = 511 \frac{\text{keV}}{c^2}$. Nach der Streuung habe das Photon den Impuls $\vec{k}' \neq \vec{k}$ und das Elektron $\vec{p}' \neq 0$. Man kann dann die Vierervektoren aufstellen:

$$(k^\mu) = \begin{pmatrix} |\vec{k}| \\ \vec{k} \end{pmatrix} \quad (k'^\mu) = \begin{pmatrix} |\vec{k}'| \\ \vec{k}' \end{pmatrix} \quad (p^\mu) = \begin{pmatrix} m_e c \\ \vec{0} \end{pmatrix} \quad (p'^\mu) = \begin{pmatrix} p'_0 \\ \vec{p}' \end{pmatrix}$$

Es gilt Impuls und Energieerhaltung, zunächst berechnet man die Energien der einzelnen Teilchen:

$$E_{ph} = c|\vec{k}| \quad E'_{ph} = c|\vec{k}'| \quad E_e = m_e c^2 \quad E'_e = \sqrt{m_e^2 c^4 + c^2 \vec{p}'^2}$$

Man erhält also folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} E_{ph} + E_e &= E'_{ph} + E'_e & \Leftrightarrow & c|\vec{k}| + m_e c^2 = c|\vec{k}'| + \sqrt{m_e^2 c^4 + c^2 \vec{p}^2} \\ \vec{k} + \vec{p} &= \vec{k}' + \vec{p}' & \Leftrightarrow & \vec{p}' = \vec{k} - \vec{k}' \end{aligned}$$

Man kann diese Formeln kombinieren und erhält ($k = |\vec{k}|, k' = |\vec{k}'|$):

$$\begin{aligned} (k + m_e c - k')^2 &= m_e^2 c^2 + (\vec{k} - \vec{k}')^2 = m_e^2 c^2 k^2 + k'^2 - 2\vec{k}\vec{k}' = m_e^2 c^2 k^2 + k'^2 - 2kk' \cos \theta \\ \Leftrightarrow k^2 + m_e^2 c^2 + k'^2 + 2km_e c - 2kk' - 2m_e c k' &= m_e^2 c^2 k^2 + k'^2 - 2kk' \cos \theta \\ \Leftrightarrow 2m_e c(k - k') &= k'k(1 - \cos \theta) \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich also folgende Beziehung für den Streuwinkel θ der Photonen:

$$\boxed{\frac{1 - \cos \theta}{2m_e c} = \frac{1}{k'} - \frac{1}{k}}$$

17. Lagrange-Formulierung der relativistischen Mechanik

In diesem Abschnitt wird es die Aufgabe sein eine Lagrange-Funktion anzugeben, aus der die relativistischen Bewegungsgleichungen abgeleitet werden können. Man macht folgenden Ansatz:

Definition 17.1 (Lagrange-Funktion eines relativistischen Teilchens)

$$L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{\dot{\vec{x}}^2}{c^2}} - V(\vec{x}) \quad (17.1)$$

Setzt man diesen Ansatz in die Euler-Lagrange-Gleichung ein (hier nur 1D), so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} &= \frac{d}{dt} \left(m_0 c^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}}} \cdot 2 \frac{\dot{x}}{c^2} \right) + \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{d}{dt} (\gamma m \dot{x}) + \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{dp}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \\ \Rightarrow \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} &= -\vec{\nabla} V(\vec{x}) \end{aligned}$$

Es ergibt sich also die relativistische Kraftgleichung. Es ist zu beachten, dass $\vec{p} = m(v) \cdot \dot{\vec{x}}$ gilt. Daraus erhält man:

Definition 17.2 (Hamilton-Funktion eines relativistischen Teilchens)

$$H = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{\dot{\vec{x}}^2}{c^2}}} + V(\vec{x}) = \gamma m_0 c^2 + V = E = \text{const} \quad (17.2)$$

Die soeben eingeführten Funktionen führen zwar innerhalb eines einzigen Bezugssystems zu den richtigen Gleichungen, sie sind aber nicht Lorentz-kovariant. Die Lorentz-kovariante Lagrange-Funktion muss der folgenden Lagrange-Gleichung gehorchen:

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial u^\mu} \right) - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial x^\mu} = 0 \quad (17.3)$$

Hierin sind alle Größen Lorentzkovariant, also ist es auch das gesamte DGLSys. Man muss also \tilde{L} so bestimmen, dass sie in (17.3) eingesetzt die richtige Bewegungsgleichung ergibt. Dies ist nur für bestimmte Kräfte möglich. Ein einfaches Beispiel ist das freie Teilchen:

17.1. Beispiel: Freies, relativistisches Teilchen

Die Bewegungsgleichung des freien Teilchens lautet:

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = m_0 \frac{du^\mu}{d\tau} = 0$$

Um diese aus einer Lagrange-Funktion ableiten zu können, muss man setzen:

$$\tilde{L} = \frac{m_0}{2} u^\nu u_\nu$$

18. Lorentzkovariante Formulierung der Elektrodynamik

18.1. Die Maxwell-Gleichungen

Man kann hier schon von dem Vorwissen ausgehen, dass die Maxwell-Gleichungen Lorentzkovariant sind. Es fehlt nur eine Formulierung, in der sie in allen Bezugssystemen die Gleiche Form haben. Da sich die Kontinuitätsgleichung $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0$ aus den Maxwell-Gleichungen herleitet kann man folgenden Vierervektor ableiten:

Definition 18.1 (Viererstromdichte)

$$(j^\mu(x^\mu)) = \begin{pmatrix} c\rho(\vec{x}, t) \\ \vec{j}(\vec{x}, t) \end{pmatrix} \quad (18.1.1)$$

Daraus erhält man sofort die Kontinuitätsgleichung in lorentzkovarianter Form:

$$\partial_\mu j^\mu(x^\mu) = 0$$

Es bleibt noch zu bemerken, dass die Ladung q eines Systems eine Lorentz-Invariante ist, denn man kann den Stromdichte-Vektor so umformen, dass sein räumlicher Anteil 0 wird (man bewegt sich also parallel zu den Strömen, mit der selben Geschwindigkeit, wie die Ladungsträger). Dann ist aber für ein Volumen V :

$$V^2 \cdot j^\mu j_\mu = V^2 \cdot j'^\mu j'_\mu = c^2 V^2 \cdot \rho^2 = c^2 q^2 = \text{const.}$$

Die nächste Aufgabe wird es sein eine einfach, lorentzkovariante Formulierung für die Maxwell-Gleichungen zu finden. Diese werden hier nochmals aufgeführt:

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{E}(\vec{r}, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} &= 0 & \text{div } \vec{E}(\vec{r}, t) &= 4\pi\rho(\vec{r}, t) \\ \text{div } \vec{B}(\vec{r}, t) &= 0 & \text{rot } \vec{B}(\vec{r}, t) - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r}, t) \end{aligned}$$

Die rechte Seite der inhomogenen Gleichungen bilden die Viererstromdichte. Die einfachste Formulierung der linken Seite erfolgt über den Feld-Tensor:

Definition 18.2 (relativistischer Feldstärketensor)

$$(F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (18.1.2)$$

Dieser Vektor ist vollständig antisymmetrisch. Der kovariante Feldstärketensor ergibt sich dann zu:

$$(F_{\mu\nu}) = (g_{\mu\alpha})(g_{\nu\beta})(F^{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (18.1.3)$$

Es wird also lediglich die Ersetzung $\vec{E} \rightarrow -\vec{E}$ durchgeführt!

Damit ergeben sich dann die inhomogenen Maxwell-Gleichungen zu:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 4\pi j^\nu$$

Man kann mit Hilfe des Feldstärketensors eine wichtige **Invariante des EM-Feldes** unter Lorentz-Trafos ableiten. Dazu betrachtet man das Analogon zum Skalarprodukt zweier Tensoren 1. Stufe, also $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$. Diese Operation entspricht gerade dem Aufsummieren des komponentenweisen Produktes der zwei Tensoren und ergibt:

$$F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = 2(\vec{B}^2 - \vec{E}^2)$$

Nun führt man nun noch den zu $(F^{\mu\nu})$ dualen Pseudotensor:

Definition 18.3 (dualer Feldstärke-Pseudotensor, Levi-Civita-Symbol)

$$G^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta} \quad \text{mit dem Levi-Civita-Symbol} \quad \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} = \begin{cases} +1 & \text{für gerade Permutationen} \\ -1 & \text{für ungerade Permutationen} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (18.1.4)$$

Dieser Tensor ist vollständig antisymmetrisch, also $G^{\mu\nu} = -G^{\nu\mu}$. Berechnet man explizit die Einträge, dann erhält man:

$$(G^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & E_z & -E_y \\ B_y & -E_z & 0 & E_x \\ B_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix} \quad (18.1.5)$$

Damit lassen sich auch die inhomogenen Maxwell-Gleichungen angeben:

$$\partial_\mu G^{\mu\nu} = 0$$

Schreibt man die homogenen Maxwell-Gleichungen aus und vergleicht die Terme mit dem Feldstärketensor $F^{\mu\nu}$, so ergibt sich noch eine Darstellung dieser Gleichungen:

$$\partial_\alpha F^{\beta\gamma} + \partial_\gamma F^{\alpha\beta} + \partial_\beta F^{\gamma\alpha} = 0$$

Man kann noch eine zweite **Invariante des EM-Feldes** berechnen. Es zeigt sich, dass die Größe $F_{\mu\nu}G^{\mu\nu}$ ebenfalls Lorentz-invariant ist:

$$F_{\mu\nu}G^{\mu\nu} = -4\vec{E} \cdot \vec{B}$$

Unter der Lorentz-Eichung $\text{div } \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$ lassen sich die Maxwell-Gleichungen auch in Form der Potentiale \vec{A}, φ darstellen:

$$\square \varphi = 4\pi\rho \quad \square \vec{A} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

Da die rechte Seite wieder die Viererstromdichte darstellt und der d'Alembert-Operator ein Lorentz-Skalar ist, müssen auch die Potentiale einen Vierervektor bilden:

Definition 18.4 (elektrodynamisches Vierervektorpotential)

$$(A^\mu) = \begin{pmatrix} \varphi \\ \vec{A} \end{pmatrix} \quad (18.1.6)$$

Man kann nun den Feldstärketensor auch durch das Potential ausdrücken:

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad (18.1.7)$$

Nun kann man die Ergebnisse zusammenfassen:

Satz 18.1 (Maxwell-Gleichungen in lorentzkovarianter Formulierung) Die Maxwell-Gleichungen lauten in manifest kovarianter Formulierung mit den Stromdichte- und dem Potentialvierervektor, sowie dem (dualen) Feldstärketensor:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 4\pi j^\nu \quad (18.1.8)$$

$$\partial_\mu G^{\mu\nu} = 0 \quad \partial_\alpha F^{\beta\gamma} + \partial_\gamma F^{\alpha\beta} + \partial_\beta F^{\gamma\alpha} = 0 \quad (18.1.9)$$

In Form von Feldern lauten sie in der Lorentzzeichnung:

$$\text{Lorentz-Eichung:} \quad \partial_\mu A^\mu = 0 \quad (18.1.10)$$

$$\text{Potentialgleichung:} \quad \square A^\mu = 4\pi j^\mu \quad (18.1.11)$$

Es ergeben sich zwei Lorentz-Skalare aus den Feldstärketensoren:

$$I_1 = F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = 2(\vec{B}^2 - \vec{E}^2) \quad (18.1.12)$$

$$I_2 = F_{\mu\nu} G^{\mu\nu} = -4\vec{E} \cdot \vec{B} \quad (18.1.13)$$

Diese Invarianten bedeuten:

- Die Eigenschaft $\vec{E} \perp \vec{B}$ bleibt unter Lorentz-Trafos erhalten. Gilt in einem Inertialsystem $\vec{E} = \vec{B} = 0$, so gilt $\vec{E} \perp \vec{B}$ in jedem anderen Inertialsystem. Aus $I_1 > 0$ folgt, dass es ein Inertialsystem gibt, in dem $\vec{B} = 0$ gilt. Für $I_1 < 0$ folgt, dass es ein Inertialsystem gibt, mit $\vec{E} = 0$.
- Gilt in einem Inertialsystem $\vec{E}^2 = \vec{B}^2$, so gilt das auch in jedem anderen Inertialsystem.

18.2. Lorentz-Transformation des EM-Feldes

Als nächstes soll die Form des EM-Feldes nach einer Lorentz-Trafo ermittelt werden. Es stellt sich also die Frage, welcher Feldtensor nach der Transformation vom Bezugssystem K ins Bezugssystem K' ergibt. Es gilt (Bewegung parallel zur z -Achse!):

$$(F'^{\mu\nu}) = (\Lambda^\mu_\alpha)(\Lambda^\nu_\beta)(F^{\alpha\beta}) \quad \text{mit} \quad (\Lambda^\mu_\alpha) = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad (F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Man kann nun die sechs Elemente des neuen Tensors, die aufgrund der Anti-Symmetriebedingung frei sind explizit berechnen (die Diagonalelemente verschwinden!):

$$F'^{01} = \Lambda^0_\alpha \Lambda^1_\beta F^{\alpha\beta} = \gamma(-E_x + \beta B_y) \stackrel{!}{=} -E'_x$$

$$F'^{02} = \Lambda^0_\alpha \Lambda^2_\beta F^{\alpha\beta} = \gamma(-E_y + \beta B_x) \stackrel{!}{=} -E'_y$$

$$F'^{03} = \Lambda^0_\alpha \Lambda^3_\beta F^{\alpha\beta} = -E_z \stackrel{!}{=} E'_z$$

$$F'^{12} = \Lambda^1_\alpha \Lambda^2_\beta F^{\alpha\beta} = B_z \stackrel{!}{=} -B'_z$$

$$F'^{13} = \Lambda^1_\alpha \Lambda^3_\beta F^{\alpha\beta} = \gamma(-B_y - \beta E_x) \stackrel{!}{=} B'_y$$

$$F'^{23} = \Lambda^2_\alpha \Lambda^3_\beta F^{\alpha\beta} = \gamma(-\beta E_y - B_x) \stackrel{!}{=} -B'_x$$

Man erhält also insgesamt:

Korollar 18.1 (Lorentz-Transformation des EM-Feldes bei Bewegung in z -Richtung)

$$B'_x = \gamma(B_x + \beta E_y) \quad B'_y = \gamma(B_y - \beta E_x) \quad B'_z = B_z \quad (18.2.1)$$

$$E'_x = \gamma(E_x - \beta B_y) \quad E'_y = \gamma(E_y + \beta B_x) \quad E'_z = E_z \quad (18.2.2)$$

Man kann nach längerer Rechnen auch die Transformation der Felder bei einer beliebigen Bewegung angeben:

Satz 18.2 (Lorentz-Transformation des EM-Feldes bei Bewegung $\vec{\beta} = \vec{v}/c$)

$$\vec{E}' = \gamma(\vec{E} + \vec{\beta} \times \vec{B}) - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \vec{\beta}(\vec{\beta} \cdot \vec{E}) \quad (18.2.3)$$

$$\vec{B}' = \gamma(\vec{B} - \vec{\beta} \times \vec{E}) - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \vec{\beta}(\vec{\beta} \cdot \vec{B}) \quad (18.2.4)$$

oder:

$$\vec{E}'_{\parallel} = \vec{E}_{\parallel} \quad \vec{E}'_{\perp} = \gamma(\vec{E}_{\perp} + \vec{\beta} \times \vec{B}) \quad (18.2.5)$$

$$\vec{B}'_{\parallel} = \vec{B}_{\parallel} \quad \vec{B}'_{\perp} = \gamma(\vec{B}_{\perp} - \vec{\beta} \times \vec{E}) \quad (18.2.6)$$

Das Feld parallel zur Bewegung ändert sich also nicht

18.3. Lorentz-Kraft

Die nächste Aufgabe besteht in der Umformulierung der Lorentz-Kraft

$$\vec{F}_L = q \cdot \left(\vec{E} + \frac{\dot{\vec{x}}}{c} \times \vec{B} \right)$$

in manifest-kovarianter Form. Es zeigt sich, dass der einfachste Ansatz schon die richtigen Ergebnisse liefert. Es gilt deswegen:

Satz 18.3 (Lorentz-Kraft in kovarianter Form) Die relativistische Verallgemeinerung der Newton'schen Bewegungsgleichung im EM-Feld lautet:

$$\frac{dp^{\mu}}{d\tau} = \frac{q}{c} F^{\mu\nu} u_{\nu} \quad \text{mit Vierergeschwindigkeit: } u_{\nu} = \frac{dx_{\nu}}{dt} \quad (18.3.1)$$

Diese Gleichung lässt sich auch so schreiben:

$$\frac{dp^0}{d\tau} = \frac{d}{dt} (\gamma m_0 c) = \frac{q}{c} \vec{E} \cdot \dot{\vec{x}} \quad (18.3.2)$$

$$\frac{d}{dt} (\gamma m_0 \dot{\vec{x}}) = q \cdot \left(\vec{E} + \frac{\dot{\vec{x}}}{c} \times \vec{B} \right) = \vec{F}_L \quad (18.3.3)$$

Dies bedeutet die \vec{F}_L liefert für beliebige Geschwindigkeiten $v < c$ die richtige Beschreibung des Systems.

18.4. Energie- und Impulserhaltung

Für den Impulssatz der Elektrodynamik wurde in Abschnitt 10.2 der Maxwell'sche Spannungstensor eingeführt:

$$T_{ik} = \frac{1}{4\pi} \left[E_i E_k + B_i B_k - \frac{\delta_{ij}}{2} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) \right]$$

Man sucht nun eine lorentzkovariante Formulierung des Energie- und Impulssatzes. Dazu konstruiert man den folgenden symmetrischen Tensor:

Satz 18.4 (relativistischer Spannungstensor, Energie- und Impulserhaltung)

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left(g^{\mu\alpha} F_{\alpha\beta} F^{\beta\nu} + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right) = \frac{1}{4\pi} \left(F^\mu{}_\beta F^{\beta\nu} + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right) \quad (18.4.1)$$

Dieser Tensor ist symmetrisch und man kann ihn mit der Energiedichte ω_{em} und der Impulsdichte \vec{S}/c^2 des EM-Feldes auch so darstellen:

$$(T^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} \omega_{em} & [\vec{S}/c]^T \\ \vec{S}/c & -(T_{ik}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\vec{E}^2 + \vec{B}^2}{8\pi} & \left[\frac{\vec{E} \times \vec{B}}{4\pi} \right]^T \\ \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{4\pi} & -(T_{ik}) \end{pmatrix} \quad (18.4.2)$$

Mit diesem tensor lässt sich die Energie- und Impulserhaltung des EM-Feldes auch so ausdrücken:

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = -\frac{1}{c} F^{\nu\rho} j_\rho \quad (18.4.3)$$

Daraus erhält man wieder den klassischen Energie- und Impulssatz:

$$\nu = 0: \quad \frac{\partial \omega_{em}}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{S} = -\vec{E} \cdot \vec{j} \quad \nu = 1, 2, 3 \quad \frac{1}{c^2} \frac{d\vec{S}}{dt} + \rho \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{j} \times \vec{B} = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div}(T_{ij}) = \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \vec{e}_i$$

18.5. Beispiel: Gleichförmig bewegte Ladung

Eine Ladung q bewege sich mit der Geschwindigkeit $\vec{v} = v \cdot \vec{e}_x$. In ihrem Ruhesystem K' kann man das Viererpotential direkt angeben:

$$(A'^\mu(\vec{x}')) = \begin{pmatrix} \frac{q}{|\vec{x}'|} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Um nun das Feld im System K des ruhenden Beobachters zu berechnen muss man das Viererpotential nur mit folgender Lorentz-Trafo transformieren:

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{und } \beta = \frac{v}{c}$$

Man erhält dann:

$$(A^\mu(\vec{x}')) = \begin{pmatrix} \gamma \cdot \frac{q}{|\vec{x}'|} \\ \gamma \cdot \frac{vq}{c|\vec{x}'|} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es bleibt nur noch den Vektor \vec{x}' zu transformieren. Es gilt:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(ct - \beta x) \\ \gamma(x - \beta ct) \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(ct - \frac{vx}{c}) \\ \gamma(x - vt) \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Man erhält also insgesamt:

$$\varphi(\vec{x}, t) = \frac{\gamma q}{\sqrt{\gamma^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2}} \quad \vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{v}{c} \frac{\gamma q}{\sqrt{\gamma^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{v}{c} \varphi(\vec{x}, t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Daraus kann man dann die Felder der bewegten Ladung berechnen. Es zeigt sich, dass das magnetische Feld in K' verschwindet, während man in K ein magnetisches Feld misst. In K lauten die Felder:

$$\begin{aligned}\vec{B}(\vec{x}, t) &= \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{x}, t) = \vec{\nabla} \times \left[\frac{v}{c} \varphi(\vec{x}, t) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \frac{v}{c} \frac{\gamma q}{[\gamma^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -z \\ y \end{pmatrix} \\ \vec{E}(\vec{x}, t) &= -\vec{\nabla} \varphi(\vec{x}, t) - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}(\vec{x}, t)}{\partial t} = \frac{\gamma q}{[\gamma^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} \left[\begin{pmatrix} \gamma^2(x - vt) \\ y \\ z \end{pmatrix} - \frac{v}{c^2} \begin{pmatrix} -\gamma^2(x - vt)v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \\ &= \frac{\gamma q}{[\gamma^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} \begin{pmatrix} \gamma^2(x - vt)(1 - \beta^2) \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{\gamma q}{[\gamma^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} \begin{pmatrix} x - vt \\ y \\ z \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Betrachtet man nur die Transversale Komponente des Feldes im System Ruhesystem des Beobachters, so stellt man beim Vorbeiflug der Ladung den Verlauf in Abb. 18.1 fest. Je näher die geschwindigkeit an c liegt (also je näher β an 1), desto schmaler wird der Bereich, in dem E_y von 0 verschieden ist. Dies bedeutet, dass das Feld in gewisser Weise gestaucht wird, wie es in den zwei Zeichnungen angedeutet ist.

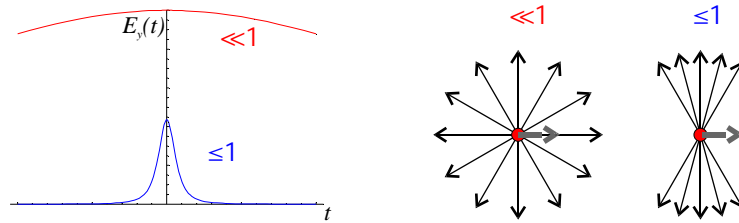


Abb. 18.1.: \vec{E} -Feld einer relativistischen bewegten Ladung

19. Lagrange-Formulierung der Elektrodynamik

Nachdem nun die relativistische Formulierung der Elektrodynamik vollständig ist, soll hier noch die Lagrange-Formulierung der Elektrodynamik erfolgen.

19.1. Lagrange- und Hamilton-Funktion eines geladenen Teilchens

Man betrachtet wieder ein Teilchen mit der Ladung q und der Ruhemasse m_0 , das sich in einem EM-Feld bewegt. Nach Abschnitt 18.3 lautet die Bewegungsgleichung:

$$\dot{\vec{p}} = \frac{d}{dt} (\gamma m_0 \dot{\vec{x}}) = q \cdot \left(\vec{E} + \frac{\dot{\vec{x}}}{c} \times \vec{B} \right) = \vec{F}_L \quad (18.3.2)$$

Man kann nun die Definitionsgleichungen des EM-Feldes aus den Potentialen verwenden und einsetzen ($\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$, $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\gamma m_0 \dot{\vec{x}}) &= q \cdot \left(-\vec{\nabla}\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{\dot{\vec{x}}}{c} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \right) = q \cdot \left(-\vec{\nabla}\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{1}{c} \vec{\nabla} \times (\vec{A} \times \dot{\vec{x}}) \right) = \\ &= q \cdot \left(-\vec{\nabla}\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{1}{c} [\underbrace{\vec{A}(\vec{\nabla} \cdot \dot{\vec{x}})}_{=0} - \dot{\vec{x}}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) + (\dot{\vec{x}} \cdot \vec{A}) - \underbrace{(\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\dot{\vec{x}}}_{=0}] \right) = \\ &= q \cdot \left(-\vec{\nabla}\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{1}{c} [(\dot{\vec{x}} \cdot \vec{A}) - \dot{\vec{x}}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A})] \right) = \\ &= q \vec{\nabla} \left(\frac{\vec{A} \cdot \dot{\vec{x}}}{c} - \varphi \right) - \frac{q}{c} \frac{d\vec{A}}{dt} \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\gamma m_0 \dot{\vec{x}} + \frac{q}{c} \vec{A} \right) - q \vec{\nabla} \left(\frac{\vec{A} \cdot \dot{\vec{x}}}{c} - \varphi \right) &= 0 \end{aligned} \quad (19.1.1)$$

Schreibt man die Lagrange-Gleichungen in vektorieller Form, so lauten sie:

$$\frac{d}{dt} \vec{\nabla}_{\dot{\vec{x}}} L - \vec{\nabla}_{\vec{x}} L = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit (19.1.1), so kann man die Lagrange-Funktion ableiten:

$$L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{\dot{\vec{x}}^2}{c^2}} - q\varphi + \frac{q}{c} \vec{A} \cdot \dot{\vec{x}}$$

Daraus kann man den generalisierten Impuls des Teilchens berechnen:

$$\vec{P} = \vec{\nabla}_{\dot{\vec{x}}} L = \gamma m_0 \dot{\vec{x}} + \frac{q}{c} \vec{A} = \vec{p} + \frac{q}{c} \vec{A}$$

Damit kann man dann die zugehörige Hamilton-Funktion über eine Legendre-Transformation berechnen:

$$H = \vec{P} \cdot \dot{\vec{x}} - L = \gamma m_0 c^2 + q\varphi = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{\dot{\vec{x}}^2}{c^2}}} + q\varphi$$

Dabei wurde benutzt, dass $\dot{\vec{x}}^2 = u_\mu u^\mu|_{t=0} = u_\mu u^\mu|_{t \neq 0} = c^2$ gilt. In dieser Form ist H aber immernoch eine Funktion von $\dot{\vec{x}}$. Somit muss $\dot{\vec{x}}$ noch eliminiert werden. Dazu formt man die Gleichung des kanonischen Impulses um:

$$\begin{aligned}\vec{P} - \frac{q}{c} \vec{A} &= \frac{m_0 \dot{\vec{x}}}{\sqrt{1 - \frac{\dot{\vec{x}}^2}{c^2}}} \\ \Rightarrow \left(\vec{P} - \frac{q}{c} \vec{A} \right)^2 &= \frac{m_0^2 \dot{\vec{x}}^2}{1 - \frac{\dot{\vec{x}}^2}{c^2}} \\ \Rightarrow \frac{1}{\left(\vec{P} - \frac{q}{c} \vec{A} \right)^2} &= \frac{1}{m_0^2 \dot{\vec{x}}^2} - \frac{\frac{\dot{\vec{x}}^2}{c^2}}{m_0^2 \dot{\vec{x}}^2} = \frac{1}{m_0^2 \dot{\vec{x}}^2} - \frac{1}{m_0^2 c^2} \\ \Rightarrow m_0^2 \dot{\vec{x}}^2 &= \frac{1}{\left(\vec{P} - \frac{q}{c} \vec{A} \right)^2 + \frac{1}{m_0^2 c^2}} = \frac{m_0^2 c^2}{\left(\vec{P} - \frac{q}{c} \vec{A} \right)^2 + 1} \\ \Rightarrow 1 - \frac{\dot{\vec{x}}^2}{c^2} &= 1 - \frac{\left(\vec{P} - \frac{q}{c} \vec{A} \right)^2}{m_0^2 c^2 + \left(\vec{P} - \frac{q}{c} \vec{A} \right)^2} = \frac{m_0^2 c^2 + \left(\vec{P} - \frac{q}{c} \vec{A} \right)^2 - \left(\vec{P} - \frac{q}{c} \vec{A} \right)^2}{m_0^2 c^2 + \left(\vec{P} - \frac{q}{c} \vec{A} \right)^2} = \frac{m_0^2 c^2}{m_0^2 c^2 + \left(\vec{P} - \frac{q}{c} \vec{A} \right)^2}\end{aligned}$$

Damit erhält man dann:

$$\begin{aligned}H &= \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{\dot{\vec{x}}^2}{c^2}}} + q\varphi = q\varphi + \frac{m_0 c^2}{\sqrt{\frac{m_0^2 c^2}{m_0^2 c^2 + \left(\vec{P} - \frac{q}{c} \vec{A} \right)^2}}} = \\ &= q\varphi + m_0 c^2 \sqrt{\frac{m_0^2 c^2 + \left(\vec{P} - \frac{q}{c} \vec{A} \right)^2}{m_0^2 c^2}} = \sqrt{m_0^2 c^4 + c^2 \left(\vec{P} - \frac{q}{c} \vec{A} \right)^2} + q\varphi\end{aligned}$$

Man hat also zusammenfassend:

Satz 19.1 (Lagrange- und Hamilton-Funktion eines geladenen Teilchens im EM-Feld)

$$L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{\dot{\vec{x}}^2}{c^2}} - q\varphi + \frac{q}{c} \vec{A} \cdot \dot{\vec{x}} \quad (19.1.2)$$

$$H = \sqrt{m_0^2 c^4 + c^2 \left(\vec{P} - \frac{q}{c} \vec{A} \right)^2} + q\varphi \quad (19.1.3)$$

Dies bedeutet, dass die Wechselwirkung des EM-Feldes mit einer Ladung durch die folgende Lagrange-Funktion beschrieben wird ($L_{\text{frei}} = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{\dot{\vec{x}}^2}{c^2}}$):

$$L' = L - L_{\text{frei}} = -q\varphi + \frac{q}{c} \vec{A} \cdot \dot{\vec{x}} = -\frac{q}{\gamma c} u_\mu A^\mu \quad (19.1.4)$$

19.2. Lagrange-Dichte des EM-Feldes

19.2.1. Einführung in die klassische Feldtheorie

Die Euler-Lagrange-Gleichungen ergeben sich über die Variation der Wirkung, die gegeben ist durch:

$$S = \int L(\vec{x}(t), \dot{\vec{x}}(t), t) dt$$

Dies kann man zu einer Lagrange-Dichte erweitern. Sie beschreibt nicht mehr Punktteilchen, sondern kontinuierliche Verteilungen von Massen, bzw. hier Ladungen. Man erhält dann für die Wirkung:

$$S = \int d^4x \sum_i \mathcal{L}(\phi_i(x) + \partial_\mu \phi_i(x), x) \quad (19.2.1)$$

Dabei ist $x = (x^\mu)$ der Vierervektor und $\phi_i(x)$ ein System von Feldern. Bisher ist dieser Ansatz noch allgemein für alle möglichen Feldtheorien. Es gilt also die Lagrange-Dichte \mathcal{L} so zu bestimmen, dass sie folgende Bedingungen erfüllt:

1. Der Lagrange-Formalismus soll die bekannten Bewegungsgleichungen, die der Feld-Theorie zugrunde liegen ergeben. In unserem Fall sind das die Maxwell-Gleichungen.
2. Die Feld-Theorie soll lokal sein, d.h. die Lagrange-Dichte soll nur von den Feldern an einem Ort x abhängen.
3. Unter Eichtransformationen darf sich \mathcal{L} höchstens um eine totale Divergenz ändern, damit die Wirkung invariant bleibt. Man kann dann nämlich die Divergenz mit Hilfe des Gauß'schen Satzes in ein Oberflächenintegral umwandeln. Fordert man nun, dass physikalisch sinnvolle Felder im unendlichen verschwinden, so kann man die Integrationsfläche ins unendliche legen und die totale Divergenz trägt nichts zur Wirkung S bei.

Aus dem allgemeinen Variationsprinzip $\delta S = 0$ folgen dann die Euler-Lagrange-Gleichungen des Feldes (Variation $\delta\phi$ des Feldes):

$$\begin{aligned}\delta S &= \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \cdot \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \cdot \delta(\partial_\mu \phi) \right] = \\ &= \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \cdot \delta\phi + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \cdot \delta\phi \right) - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) \cdot \delta\phi \right] = \\ &= \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) \right] \cdot \delta\phi \stackrel{!}{=} 0\end{aligned}$$

Dabei wurde gemäß obiger Diskussion der totale Divergenz-Term $\int d^4x \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) = 0$ gesetzt. Es ergibt sich also:

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} = 0, \quad i, \mu = 0, 1, 2, \dots} \quad (19.2.2)$$

19.2.2. Lagrange-Dichte des EM-Feldes

Hier soll nun speziell die Feld-Theorie des EM-Feldes entwickelt werden. Statt des allgemeinen Feldes ϕ betrachtet man also das Viererpotential (A^μ) , bzw. den Feldtensor $F^{\mu\nu}$. Da in den Maxwell-Gleichungen nur Ableitungen erster Ordnung in den Feldern auftreten, dürfen in der Lagrange-Dichte die Felder auch nur in Ableitungen höchstens erster Ordnung auftreten. Weiter darf man in Analogie zum freien Teilchen erwarten, dass die Geschwindigkeiten in einer quadratischen Form auftreten. Beim freien Teilchen war das $u^\mu u_\mu$ (siehe Abschnitt 17.1). Für die Lagrange-Dichte sind die „Geschwindigkeiten“ die Größen $\partial^\mu A^\nu$. Diese hängen über $F^{\alpha\beta} = \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha$ mit dem elektromagnetischen Feldtensor zusammen. Da die Lagrange-Dichte lorentzinvariant sein soll, dürfen also nur quadratische Formen auftreten, die sich wie ein Lorenz-Skalar verhalten. Man kann man sich überlegen, dass dies nur folgende Lorenz-Skalare sein dürfen:

$$\partial_\mu A^\nu \partial^\mu A_\nu, \quad \partial_\mu A^\mu \partial_\nu A^\nu, \quad (\partial_\mu A^\mu)^2, \quad A_\mu A^\mu, \quad j_\mu A^\mu$$

Sie müssen so auftreten, dass sich gerade die inhomogenen Maxwell-Gleichungen aus (19.2.2) ergeben, also:

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j_\nu$$

Damit kann man folgende Lagrange-Dichte ableiten:

Satz 19.2 (Lagrangedichte des EM-Feldes)

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{c} j_\mu A^\mu + \underbrace{\partial_\mu D^\mu}_{\text{totale Divergenz}} \quad (19.2.3)$$

Beweis: Es lässt sich nun leicht zeigen, dass sich die richtigen Gleichungen ergeben:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{c} j_\mu A^\mu = -\frac{1}{16\pi} g_{\alpha\gamma} g_{\beta\rho} (\partial^\gamma A^\rho - \partial^\rho A^\gamma) (\partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha) - \frac{1}{c} A^\alpha j_\alpha$$

Daraus berechnet man:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\nu} &= -\frac{1}{c} j_\nu \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu A^\nu)} &= -\frac{1}{16\pi} g_{\alpha\gamma} g_{\beta\rho} [(\delta_\mu^\gamma \delta_\nu^\rho - \delta_\mu^\rho \delta_\nu^\gamma) F^{\alpha\beta} + (\delta_\mu^\alpha \delta_\nu^\beta - \delta_\mu^\beta \delta_\nu^\alpha) F^{\gamma\rho}] = \\ &= -\frac{1}{16\pi} [g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} F^{\alpha\beta} - g_{\alpha\nu} g_{\beta\mu} F^{\alpha\beta} + g_{\mu\gamma} g_{\nu\rho} F^{\gamma\rho} - g_{\nu\gamma} g_{\mu\rho} F^{\gamma\rho}] = \\ &= -\frac{1}{16\pi} (F_{\mu\nu} - F_{\nu\mu} + F_{\mu\nu} - F_{\nu\mu}) \underset{F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}}{=} -\frac{1}{4\pi} F_{\mu\nu} \end{aligned}$$

Man erhält also das gewünschte Ergebnis:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j_\nu$$

Somit ergeben sich die inhomogenen Maxwell-Gleichungen. Die homogenen Gleichungen sind aufgrund der Definition von $F^{\alpha\beta}$ automatisch erfüllt:

$$\partial_\alpha G^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \partial_\alpha e^{\alpha\beta\lambda\mu} F_{\lambda\mu} = \partial_\alpha e^{\alpha\beta\lambda\mu} \partial_\lambda A_\mu = e^{\alpha\beta\lambda\mu} \partial_\alpha \partial_\lambda A_\mu$$

Dabei ist $e^{\alpha\beta\lambda\mu}$ antisymmetrisch und $\partial_\alpha \partial_\lambda$ symmetrisch, sodass dieser Term verschwindet. Also sind auch die homogenen Lorenz-Gleichungen erfüllt.

19.2.3. Eichinvarianz

Die allgemeine Eichtransformation sieht im Tensorbild so aus:

$$A^\mu \rightarrow A'^\mu = a^\mu - \partial^\mu \chi.$$

Setzt man diese in (19.2.3) ein, so ergibt sich:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{c} j_\mu A^\mu + \frac{1}{c} j_\mu \partial^\mu \chi$$

Ist der Viererstrom erhalten ($\partial^\mu j_\mu = 0$), so kann man den letzten Term als totale Divergenz schreiben und er trägt somit nicht zur Wirkung S bei:

$$\partial^\mu (j_\mu \chi) = \underbrace{\chi \partial^\mu j_\mu}_{=0} + j_\mu \partial^\mu \chi = j_\mu \partial^\mu \chi$$

Dies bedeutet:

Die Erhaltung des Viererstromes j^μ ist notwendig und hinreichend für die Eichinvarianz der Feldtheorie.

19.2.4. Hamilton-Formalismus

Aus der Lagrange-Dichte kann man nun eine verallgemeinerte hamilton-Funktion, die Hamilton-Dichte ableiten;

$$\mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{d\phi}{dt} \right)} \frac{\partial \phi}{\partial t} - \mathcal{L}$$

Diese wiederum kann man zum **Energie-Impuls-Tensor** erweitern:

$$\Theta^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial^\nu \phi - g^{\mu\nu} \mathcal{L}$$

19.3. Hypothetische Photonenmasse

Die Maxwell-Gleichungen basieren auf der Annahme, dass die Ruhemasse der Photonen $m_{ph} = 0$ ist. Baut man eine Feldtheorie, die von massebehafteten Teilchen vermittelte Wechselwirkungen beschreibt, so erhält man in der Lagrange-Dichte zusätzlich einen Masseterm. Es gilt dann:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + \frac{\mu^2}{8\pi} A_\alpha A^\alpha - \frac{1}{c} J_\alpha A^\alpha, \quad \mu = \frac{mc}{\hbar}$$

Anstatt der Maxwell-Gleichungen erhält man dann die Proca'schen Bewegungsgleichungen:

$$\partial^\beta F_{\beta\alpha} + \mu^2 A_\alpha = \frac{4\pi}{c} J_\alpha$$

In der Lorentzzeichnung $\partial_\alpha A^\alpha = 0$ erhält man dann:

$$\square A_\alpha + \mu^2 A_\alpha = \frac{4\pi}{c} J_\alpha$$

Im statischen Grenzfall erhält man dann als Lösung für das elektrische Potential:

$$\varphi(x) = \frac{q \cdot e^{-\mu r}}{r}$$

Dies entspricht einem Potential der Elektrodynamik, dessen Reichweite durch einen Exponentialterm eingeschränkt wird. Die Wechselwirkung ist also wesentlich kurzreichweitiger (siehe z.B. schwache und starke Kernkraft).

19.4. Abschließende Bemerkungen zur Feldtheorie

In [Schlickeiser 2003] findet sich eine gute und kurze Einführung in die allgemeine, klassische Feldtheorie (siehe dort Kapitel 7.4). Man kann nun zusammenfassend über die feldtheoretische Formulierung (oder eben Lagrange-Formulierung) folgendes sagen:

Oft möchte man experimentelle Ergebnisse (z.B. die Maxwell-Gleichungen) mit einer relativistischen (d.h. und Lorentz-Trafos invarianten) Feldtheorie beschreiben. Dazu führt man dann axiomatisch eine Lagrange-Dichte $\mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu \phi_i, (x_\mu))$ für das Feld ein, von der nur gefordert wird, dass sie Lorentz-invariant ist. Aus dieser lassen sich dann über die Euler-Lagrange-Gleichung

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Bewegungsgleichungen für das Feld ableiten, die man gegen das Experiment verifizieren kann. Um die obige Lagrange-Funktion in Feldern A_i zu verstehen kann man den Formalismus mit dem gut bekannten Formalismus der klassischen Mechanik vergleichen (siehe Tabelle 19.1).

	klassische Mechanik		klassische Feldtheorie
äußerer Parameter:	Zeit t	\leftrightarrow	Vierervektor $(x^\mu) = (ct, x, y, z)$
beschriebene Größe:	verallgem. Ort, Geschw. $\vec{x}, \dot{\vec{x}}$	\leftrightarrow	Potential, Feld $(A^\mu), (F^{\mu\nu}) \propto (\partial^\mu A^\nu)$
Lagrange-Funktion:	$L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t)$	\leftrightarrow	Lagrange-Dichte $\mathcal{L}(A_i, \partial_\mu A_i, (x_\mu))$
Wirkungsintegral:	$S = \int L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) dt$	\leftrightarrow	$S = \int \mathcal{L}(A_i, \partial_\mu A_i, (x_\mu)) d^4x$
Euler-Lagrange-Gleichungen:	$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0$	\leftrightarrow	$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_i)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_i} = 0$

Tabelle 19.1: Vergleich des Lagrange-Formalismus in der klassischen Mechanik und in der Feldtheorie

Es soll nun noch ein etwas anschaulicherer Ansatz zur Erklärung der Lagrange-Dichte des EM-Feldes gegeben werden. Ein freies Feld, also ohne anwesende Quellen (z.B. EM-Feld im ladungs- und stromfreien Raum) hat eine Lagrange-Funktion der folgenden Form:

$$\mathcal{L}_{\text{frei}} = -\frac{1}{16\pi} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad \Rightarrow \quad \text{Bewegungsgleichung: } \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$$

Hierbei tritt die quadratische Form (Lorentz-Skalar) $F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$ auf. Sie entspricht in etwa dem Geschwindigkeitsquadrat in der kinetischen Energie $T = \frac{m}{2} \dot{x}^2$ in der klassischen Mechanik. Dies lässt sich motivieren, wenn man beachtet, dass das Feld $F^{\mu\nu}$ proportional zu den „Geschwindigkeiten“ $\partial^\mu \phi^\mu$ im Lagrange-Formalismus für Felder ist. Diese Lagrange-Dichte entspricht dann in etwa $L_{\text{frei}} = T = \frac{m}{2} \dot{x}^2$ eines freien klassischen Teilchens der Masse m .

Man kann dieses freie Feld nun an Quellen (j^μ) koppeln, indem man einen Term

$$\mathcal{L}_{\text{Quelle}} = A_\mu j^\mu \quad \Rightarrow \quad \text{Bewegungsgleichung: } \partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$$

hinzufügt.

Teil IV.

Anhang

A. Weblinks

A.1. Grundlagen

- http://de.wikipedia.org/wiki/Relativistisches_Additionstheorem_f%C3%BCr_Geschwindigkeiten
-

Literaturverzeichnis

- [Greiner 2002] *Greiner, Walter (2002): Klassische Elektrodynamik*, 6. Auflage, Thun - Frankfurt/Main: Verlag Harri Deutsch.
- [Jackson 2002] *Jackson, John David (2002): Klassische Elektrodynamik*, 3. Auflage, Berlin - New York: deGruyter-Verlag.
- [Nolting 2002] *Nolting, Wolfgang (2002): Grundkurs Theoretische Physik 3. Elektrodynamik*, 5. Auflage, Berlin - Heidelberg - New York: Springer-Verlag.
- [Nolting 2005] *Nolting, Wolfgang (2005): Grundkurs Theoretische Physik 4. Spezielle Relativitätstheorie, Thermodynamik*, 6. Auflage, Berlin - Heidelberg - New York: Springer-Verlag.
- [Schlickeiser 2003] *Schlickeiser, R. (2003): Elektrodynamik, Skript SS 2003*. 24.06.2006 (URL: <http://www.tp4.rub.de/skripte/edynV2.pdf>)
- [Wachter, Hoeber 2005] *Wachter, Armin / Hoeber, Henning (2005): Repetitorium der theoretischen Physik*, 2. Auflage, New York - Berlin - Heidelberg: Springer.