- **Zwangsbedingungen:**
Holonome ZB: $f_i(q_1, ...q_{3N}, t) = 0, \quad i = 1, ...k$ (d.h. Einschränkung auf Flächen im $\mathbb{R}^3$). f_i hängen von der Zeit ab $\rightarrow$ *rheonome ZB*; f_i zeitunabhngig $\rightarrow$ *skleronome ZB*
Nichtholonome ZB: die Bahn lässt sich nicht durch eine derartige Gl. beschreiben. Die Zwangsbedingung kann z.B. auf einen Raumbereich einschränken $f_i(q_1, ...q_{3N}, t) < c$, oder auch von den Geschwindigeiten abhängen.

- D'ALEMBERT**-Prinzip:**
$\sum\limits_{i=1}^{N} \left(m_i \ddot{\vec{r}} - \vec{F}_i \right) \cdot \delta \vec{r}_i = \sum\limits_{i=1}^{N} \vec{Z}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0$ mit $\vec{Z}_i$: Zwangskräfte; $\delta \vec{r}_i$ virtuelle Verrückung

- LAGRANGE**-Formalismus:**
Lagrange-Funktion: $\mathcal{L} := T - V$ in n Koordinaten $(x_1 ... x_n)$; Euler-Lagrange-Gleichung: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = 0$

- **kanonische Impulse:** $p_j := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}$ **stationärer Punkt im Potenzial** $V(x)$**:** $\frac{dV}{dx}(x_s) = 0$ und $E = V(x_s)$. x_s stabil für $\frac{d^2V}{dx^2}(x_s) > 0$ und instabil für $\frac{d^2V}{dx^2}(x_s) < 0$ **Umkehrpunkt:** $V(x_u) = E_{ges}$, $\frac{dV}{dx}(x_u) \neq 0$ **GG-Punkt:** $\dot{x} = \ddot{x} = 0$

- **Erhaltungsgröße:** $\frac{d}{dt} f(q, \dot{q}, t) = 0$ Für $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$ ist Hamilton-Funktion H eine Erhaltungsgröße. Für skleronome ZB, ruhende Bezugssysteme und konserv. Kräfte gilt weiter $H = T + V$.

- **zyklische Koordinaten:** q_j zyklisch, falls: $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} = \frac{d}{dt} p_j = 0 \quad \Rightarrow$ zu q_j konjugierter Impuls p_j ist erhalten.

- NOETHER**-Theorem:** Ist $\mathcal{L}$ bis auf ein totales zeitliches Differential invariant unter $q_i \rightarrow q'_i = q'_i(q_1, ...q_{3N-k}, t, \alpha)$ (mit $q'_i(\alpha = 0) = q_i$ und in α stetig diff'bar), also: $\mathcal{L}'(q', \dot{q}', t, \alpha) = \mathcal{L}(q', \dot{q}', t) + \frac{d}{dt} F(q', t, \alpha)$, so ist
$J = \sum_{i=1}^{3N-k} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i(q', t, \alpha)}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=0} - \frac{\partial F(q', t, \alpha)}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=0}$ bzw. für $F \equiv 0$ $I(q, \dot{q}, t) = \sum_{i=1}^{3N-k} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i(q', t, \alpha)}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=0}$ eine Erhaltungsgröße.

- **Virialsatz:** $\overline{T} = \frac{1}{2} \cdot \overline{\sum\limits_{i=1}^{n} \vec{r}_i \cdot \vec{\nabla}_i U} \left[= -\frac{1}{2} \cdot \overline{\sum\limits_{i=1}^{n} \vec{r}_i \cdot \vec{F}} \right]$, mit $\overline{f} = \lim\limits_{t_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{2t_0} \int\limits_{-t_0}^{t_0} f(t) dt.$
Ist $U(a \cdot q_1, ..., a \cdot q_N) = a^k U(q_1, ..., q_N)$, dann ist $\sum\limits_{i=1}^{n} \vec{r}_i \cdot \vec{\nabla}_i U = k \cdot U$, also $2\overline{T} = k\overline{U}$

- **Variationsrechnung:** geg: $F(y, \dot{y}, t)$. Finde $y(t)$ so, dass $\int_{t_1}^{t_2} F \, dt$ minimal wird. Die Euler-Lagrange-Gleichung ist eine notwendige Bedingung für die Extremum des Integrals. Sie lautet: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0$

- **Zentralkraft:**
Zweikörperproblem: Das Zweikörperproblem ohne äußere Kräfte kann in ein gleichförmige Schwerpunktsbewegung ($\ddot{\vec{R}} = 0$, mit $\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$) und eine davon abgekoppelte Relativbewegung $\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$, mit $\vec{r} := \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ zerlegt werden.
effektives Potenzial: $V_{eff}(r) = V(r) + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} = V(r) + \frac{L^2}{2mr^2}$

- **starrer Körper:**
  - *Trägheitstensor:* $I_{ij} = \sum\limits_{\alpha=1}^{n} m_\alpha \left[x_{\alpha k} x_{\alpha k} \delta_{ij} - x_{\alpha i} x_{\alpha j} \right] \quad \Rightarrow \quad \underline{I} = \sum\limits_{a=1}^{n} m_a \begin{pmatrix} y_a^2 + z_a^2 & -x_a y_a & -x_a z_a \\ -y_a x_a & x_a^2 + z_a^2 & -y_a z_a \\ -z_a x_a & -z_a y_a & x_a^2 + y_a^2 \end{pmatrix} = \int\limits_V \rho(x, y, z)(\cdots) dx \, dy \, dz$
  - *Satz von Steiner:* Trägheitsmoment bei Rotation um Achse parallel zu Achse durch SP (dort: J_S): $J_X = mr_S^2 + J_S$
  - *Schwerpunktsatz:* $m \cdot \ddot{\vec{r}}_S = \sum_{\alpha=1}^{n} \vec{F}_\alpha^{(a)} =: \vec{F}^{(a)}$; Der Schwerpunkt bewegt sich so, als ob die resultierende Kraft an ihm angreift und alle Masse in ihm vereinigt ist.
  - *Drehimpulssatz:* $\sum\limits_{\alpha=1}^{n} m_\alpha \vec{r}_{I\alpha} \times \ddot{\vec{r}}_{I\alpha} = \sum\limits_{\alpha=1}^{n} \vec{r}_{I\alpha} \times \vec{F}_\alpha^{(a)} \quad \Leftrightarrow \quad \dot{\vec{L}}_{ges} = \vec{M} = \underline{I}_S \dot{\vec{\omega}}$
  - *kinetische Energie:* $T_{rot} = \frac{1}{2} \vec{\omega}^t \cdot \underline{I} \cdot \vec{\omega}$ (evtl. muss man die Rotation noch auf die körperfesten Hauptträgheitsachsen projizieren)
  $\vec{r}_O$ Ursprung O körperfestes System, $\vec{r}_\alpha = \vec{r}_{OP} = \overline{OP}$ Abstand zum körperfesten Ursprung O: $\vec{v}_{inertial} = \dot{\vec{r}}_O + \vec{\omega} \times \vec{r}_{OP}$
  $\Rightarrow \quad T = \frac{M}{2} \dot{\vec{r}}_O^2 + \frac{1}{2} \sum\limits_\alpha m_\alpha (\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha)^2 + (\dot{\vec{r}}_O \times \vec{\omega}) \cdot \sum\limits_i m_i \vec{r}_i = T_{trans} + T_{rot} + T_{koppel}$
  $\rightarrow$ körperfestes System mit Ursprung in Schwerpunkt $\vec{S} = \vec{r}_O \quad \Rightarrow \quad T = T_{trans} + T_{rot}$, da $\sum\limits_i m_i \vec{r}_i = 0$
  $\rightarrow$ körperfestes System mit Ursprung in raumfestem Aufhängepunkt ($\dot{\vec{r}}_O = 0$) $\quad \Rightarrow \quad T = T_{rot}$

- **Legendre-Trafo I:** beschreibt den Übergang (x, y) in einer Funktion $f(x, y)$ zu $(u := \frac{\partial f}{\partial x}, y)$in einer neuen Funktion $g(u, y)$:
Es gilt: $df = \frac{\partial f}{\partial x} \, dx + \frac{\partial f}{\partial y} \, dy = u \, dx + v \, dy$ mit $u := \frac{\partial f}{\partial x}$ und $v := \frac{\partial f}{\partial y}$
Für eine Funktion $g := f - ux$ gilt: $dg = df - u \, dx - x \, du = v \, dy - x \, du$. Diese ist die gesuchte Funktion $g(u, y)$, mit $dg = \frac{\partial g}{\partial u} \, du + \frac{\partial g}{\partial y} \, dy$.
Ein Vergleich der vollst. Differential ergibt: $v = \frac{\partial g}{\partial y}$ und $x = -\frac{\partial g}{\partial u}$

- **Legendre-Trafo II:** für Lagrange $\rightarrow$ Hamilton gilt $(q, \dot{q}) \rightarrow (q, p))$, also: $\mathcal{L}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) \rightarrow H(\vec{q}, \vec{p}, t)$, dabei nutzt man: kanon. Impuls $p_i = \partial \mathcal{L} / \partial \dot{q}_i \quad \Rightarrow \quad \dot{p}_i = \partial \mathcal{L} / \partial q_i$ (aus Euler-Lagrange-Gleichung).

$$H(p, q, t) = \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i p_i - \mathcal{L}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t); \quad \Rightarrow \; dH = \sum_{i=1}^{n} (\dot{q}_i \, dp_i - p_i \, d\dot{q}_i) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt \qquad \text{andererseits: } dH = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt$$

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}; \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}; \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}; \quad H(\vec{p}, \vec{q}, t) = \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i(\vec{p}, \vec{q}, t) \cdot p_i - \mathcal{L}\left(\vec{q}, \dot{\vec{q}}(\vec{q}, \vec{p}, t) \right)$$

- **kanonische Transformationen:** Finde $q_i \rightarrow Q_i(\vec{q}, \vec{p}, t)$ und $p_i \rightarrow P_i(\vec{q}, \vec{p}, t)$ so, dass es eine neue Hamiltonfunktion $K(P, Q, t)$ gibt, die die Hamilton'schen Gleichungen erfüllt $\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P}$; $\dot{P}_i = \frac{\partial K}{\partial Q}$
Eine Transformation heißt kanonisch, gdw. $\left[\sum\limits_i p_i \dot{q}_i - H \right] - \left[\sum\limits_i P_i \dot{Q}_i - K \right] = \frac{d}{dt} F(q, p, Q, P, t).$ Da P und Q Fkt. von p und q sind,

gibt es nur 2n+1 unabh. Variable. Also lässt sich F folgendermaßen darstellen und es gilt neben $K = H + \frac{\partial F_i}{\partial t}$:

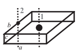
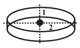
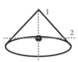
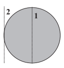
$F_1(q,Q,t)$: $p = \frac{\partial F}{\partial q}$; $P = -\frac{\partial F}{\partial Q}$	$F_2(q,P,t)$: $p = \frac{\partial F}{\partial q}$; $Q = -\frac{\partial F}{\partial P}$	$F_3(p,Q,t)$: $q = \frac{\partial F}{\partial p}$; $P = -\frac{\partial F}{\partial Q}$	$F_4(p,P,t)$: $q = \frac{\partial F}{\partial p}$; $Q = -\frac{\partial F}{\partial P}$

ist $\frac{\partial F_i}{\partial t}$, so ist $H = K$ und es gilt die einfachere Bedingung für kanonität: $\sum_{i=1}^{n}(p_i\dot{q}_i - P_i\dot{Q}_i) = \frac{dF}{dt}$

- **Poisson-Klammern:**
  - $[f,g]_{q,p} := \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}\right)$
  - $\frac{df}{dt}$, in einem System, das durch die Hamilton-Funktion H beschrieben wird hat dann die Form: $\frac{df}{dt} = [f,H] + \frac{\partial f}{\partial t}$

  $\Rightarrow$ f mit $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$, ist Erhaltungsgröße, gdw. $[f,H] = 0$
  - kanonische Gleichungen: $\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = [q_i, H]$ $\qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = [p_i, H]$
  - Rechenregeln: $[c_1 f + c_2 g, h] = c_1[f,h] + c_2[g,h]$ $\qquad [f,g] = -[g,f]$ $\qquad [const, f] = 0$
    $[fg,h] = f[g,h] + [f,h]g$ $\qquad [f,[g,h]] + [g,[h,f]] + [h,[f,g]] = 0$
  - kanonische Invarianten: Eine Transformation $q_i \to Q_i$; $p_i \to P_i$ ist genau dann kanonisch, wenn: $[q_i,q_j] = [p_i,p_j] = 0$, $\quad [q_i,p_j] = \delta_{ij}$
- **Liouville-Satz (=Satz von der Erhaltung des Phasenraums):** Die Bewegung eines Systems im Phasenraum Γ wird durch die Trajektorie $\vec{x}_\Gamma(t) = (\vec{q}(t), \vec{p}(t))$ beschrieben. Mit $w_\Gamma(t) = \dot{\vec{x}}_\Gamma(t) = \left(-\frac{\partial H}{\partial q_1}, ..., -\frac{\partial H}{\partial q_k}, \frac{\partial H}{\partial p_1}, ..., \frac{\partial H}{\partial p_k}\right)$ gilt dann $\operatorname{div}\vec{w}_\Gamma = 0$.
  Ein Volumen $V_\Gamma(t_0)$ mit der geschlossenen Begrenzungsfläche $S_\Gamma(t_0)$ strömt mit dem Geschw.feld $\vec{w}_\Gamma(t)$ durch den Phasenraum. Es gilt:
  $$\frac{d}{dt}V_\Gamma(t) = \int_{V_\Gamma(t)} \operatorname{div}\vec{w}_\Gamma \cdot\ dq_1..dq_n \cdot\ dp_1..dp_n = 0$$
- **Stabilität & Chaos:**
  - *Fixpunkte:* $\dot{x}_{fix} = 0$ bzw. $x_{fix} = f(x_{fix})$.
    für Systeme $x_{n+1} = f(x_n)$: $\left|\frac{\partial f}{\partial x}|_{x=x_{fix}}\right| < 1 \quad\Rightarrow\quad x_{fix}$ stabil, da f dort Kontrak.; ... $> 1 \quad\Rightarrow\quad x_{fix}$ instabil
    für Systeme $\dot{x} = f(x,\dot{x})$: betrachte kl. Störung $\epsilon(t) \ll 1$ des FP x_f: $x_f \mapsto x_f + \epsilon$ sei Lösung. Setze in DGl ein und betrachte lin. Näherung der entstehenden DGl in ϵ: $\quad \epsilon \propto e^{a\cdot t}$: $a > 0$ instabil, $a < 0$ stabil
  - *Stabilitätsmatrix eines DGlSys* $\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x},t)$: $\underline{A} := \vec{\nabla}\vec{f}(\vec{x},t) = \begin{pmatrix} \partial f_1/\partial x_1 & \partial f_1/\partial x_2 & \cdots \\ \partial f_2/\partial x_1 & \ldots\ldots\ldots\ldots & \end{pmatrix}$
    $\vec{x}_f \mapsto \vec{x}_f + \vec{\delta}(t)$ in DGl $\Rightarrow \dot{\vec{\delta}} = f(\vec{x}_f + \vec{\delta}, t) \overset{Taylor}{=} \vec{\nabla}\vec{f}\cdot\vec{\delta} = \underline{A}\cdot\vec{\delta} = \lambda\vec{\delta}$, λ EW von $\underline{A} \Rightarrow$ exp-Ansatz $\Rightarrow \vec{x}_f$ stabil, falls $\forall\lambda$: Re $(\lambda) < 0$, da dann $\vec{\delta} \to 0\ \ (t \to \infty)$
- **allgemeine physikalische Formeln:**

Bahngeschwindigkeit:	$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \vec{\omega}\times\vec{r} \quad\to\quad \lvert\vec{v}\rvert = \lvert\vec{\omega}\rvert\cdot\lvert\vec{r}\rvert\cdot\sin\alpha$	**Bahndrehimpuls:**	$\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p} = m\cdot\vec{r}\times\dot{\vec{r}}$
Drehmoment:	$\vec{M} = \dot{\vec{L}} = \vec{r}\times\dot{\vec{p}} = \vec{r}\times\vec{F} = m\cdot\vec{r}\times\ddot{\vec{r}}$	**Arbeit, Leistung:**	$dW = \vec{F}\,d\vec{r}$; $\quad P = \frac{W}{t} = \vec{F}\cdot\vec{v}$
ausgedr. in Winkeln:	$\vec{L} = \underline{I}\cdot\vec{\omega}$; $\quad \vec{M} = \underline{I}\cdot\dot{\vec{\omega}} = \dot{\vec{L}}$	$E_{kin} = \frac{1}{2}\vec{\omega}^t\underline{I}\vec{\omega}$;	$dW = \vec{M}\,d\varphi\cdot\vec{e}_\omega$; $\quad P = \vec{M}\cdot\vec{\omega}$
Federkraft:	$F_F(x) = -D\cdot x$	**Gravitationskraft:**	$F_G(x) = m\cdot g$ bzw. $F_G(r) = G\cdot\frac{m_1 m_2}{r^2}$
Federpotenzial:	$V_F(x) = \frac{D}{2}\cdot x^2$	**Gravitationspotenzial:**	$V_G(x) = -m\cdot g\cdot x$
Zetripetalkraft:	$F_z(r) = m\cdot\omega^2\cdot r = m\cdot\frac{v^2}{r}$; $\quad \vec{F}_r = m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$	**Corioliskraft:**	$\vec{F}_c = -2m\vec{\omega}\times\vec{v}$
kons. Kräfte:	rot $\vec{F} = 0$		

Körper	**Drehachsen**	**Moment**	**Moment**	**Körper**	**Drehachsen**	**Moment**	**Moment**
dünner Stab (Länge l)		$\frac{1}{12}ml^2$	$\frac{1}{3}ml^2$	Punktmasse (Abstand $r_\perp$)		$mr_\perp^2$	
Platte ($a, b, c,\ c < a, b$)		$\frac{1}{12}m(a^2+b^2)$	$\frac{1}{12}m(4a^2+b^2)$	Quader (a, b, c)	wie Platte	$\frac{1}{12}m(a^2+b^2)$	$\frac{1}{12}m(4a^2+b^2)$
Kreisscheibe (Radius r)		$\frac{1}{2}mr^2$	$\frac{1}{4}mr^2$	Kreisring (Radius r)	wie Scheibe	mr^2	$\frac{1}{2}mr^2$
Kreiskegel (r, h)		$\frac{3}{10}mr^2$	$\frac{3}{80}m(h^2+4r^2)$	Zylinder (r, h)	wie Scheibe	$\frac{1}{2}mr^2$	$\frac{1}{12}m(h^2+3r^2)$
Vollkugel (Radiusr)		$\frac{2}{5}mr^2$	$\frac{7}{5}mr^2$	Ellipsoid (Halbachsen a, b, c)	Rotation um $\vec{c}$	$\frac{1}{5}m(a^2+b^2)$	

- **mathematische Formeln:**
  - Für DGlSys in der Form $\ddot{\vec{x}} = \underline{A}\cdot\vec{x}$ ist der Ansatz $\vec{x} = \vec{c}\cdot e^{i\omega t}$ eine nichttriviale ($\vec{c} \neq 0$), wenn: $\det(\underline{A} + \omega^2) = 0$. Das DGlSys geht dann in eine Eigenwertgleichung über: $-\omega^2\vec{c} = \underline{A}\cdot\vec{c}$
  - **Eueler-Näherung:** $\frac{dx}{dt} = f(x) \quad\Rightarrow\quad x_{n+1} = x_n + h\cdot f(x_n)$
    DGl. 2. Ordnung → 2 DGLs 1. Ordnung: nutze neue Variablen: $(x, y := \dot{x})$ (z.B.: $\ddot{x} = -\omega^2 x \quad\to\quad \dot{x} = y;\ \ \dot{y} = -\omega^2 x$)

Ableitungen: $\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$; $\cot'(x) = \frac{-1}{\sin^2(x)}$; $\ln'(x) = \frac{1}{x}$; $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$; $\frac{d}{dx}a^x = a^x\cdot\ln(a)$;

Integrale: $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$; $\int\frac{dx}{\sqrt{1-y^2}} = \arcsin(x) + C$; $\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \arctan(x) + C$; $\int\frac{1}{ax+b}dx = \frac{1}{a}\ln(ax+b) + C$; $\int\frac{x\cdot dx}{a^2\pm x^2} = \pm\frac{1}{2}\ln(a^2\pm x^2) + C$; $\int\frac{dx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2\sqrt{ax+b}}{a} + C$; $\int\frac{x\cdot dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \sqrt{a^2+x^2} + C$; $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln(x + \sqrt{a^2+x^2}) + C$; $\int\sin^2(ax)\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4a}\sin(2ax) + C$; $\int\cos^2(ax)\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4a}\sin(2ax) + C$; $\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$; $\int_a^b f(\varphi(y))\,\varphi'(y)\,dy = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx$

Koordinaten-Transformation:

Polar:	$\vec{r} = (x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$	$dA = r\cdot drd\theta$,	
Zylinder:	$\vec{r} = (x,y,z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z)$	$dV = r\cdot drd\theta dz$,	$\dot{\vec{r}}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2$
Kugel:	$\vec{r} = (x,y,z) = (r\cos\theta\sin\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\varphi)$	$dV = r^2\sin\varphi\cdot drd\theta d\varphi$, $\quad 0 \le \varphi \le \pi$, $\quad 0 \le \theta \le 2\pi$	$\dot{\vec{r}}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + r^2\dot{\theta}^2\sin^2\varphi$

Vektoralgebra ...: $\vec{a}\times\vec{b} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$; $\quad \vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$; $\quad \vec{a}\times\vec{a} = 0$; $\quad (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = (\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}$; $\quad (\vec{a}\times\vec{b})^2 = a^2b^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2$