

Tutorial: Theoretische Mechanik

Jan Krieger

<http://www.jkrieger.de> <jan@jkrieger.de>

23. Juli 2006

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	3
2. Newton'sche Mechanik	4
2.1. Newton'sche Axiome	4
2.2. Aufstellen der Bewegungsgleichungen	4
2.3. Nebenbedingungen	5
2.4. Das d'Alembert'sche Prinzip	6
3. Lagrange'sche Mechanik	7
3.1. Verallgemeinerte Koordinaten	7
3.2. Lagrange-Formalismus, Lagrange-Gleichungen 2. Art	7
3.3. Symmetrien und Erhaltungsgrößen	9
4. Hamilton'sche Mechanik	12
4.1. Einleitung	12
4.2. Hamilton-Gleichungen	12
4.3. Poisson-Klammern	13
A. Weblinks	14
A.1. Allgemeines	14
A.2. Lagrange'sche Mechanik	14
A.3. Hamilton'sche Mechanik	14
Literaturverzeichnis	15

1. Einleitung

Als Vorbereitung auf die Diplom-Prüfung in theoretischer Physik habe ich begonnen die Vorlesungen Theoretische Physik I-IV aufzuarbeiten. Die Vorlesung Theo I (theoretische Mechanik) ist eigentlich kein Prüfungsstoff, da sie aber Grundlage aller anderen Vorlesungen ist, sollen die wichtigsten Ergebnisse und Beispiele in diesem kurzen Tutorial zusammengefasst werden. Weitere Tutorials für die Vorlesungen Theo II (Elektrodynamik, spezielle relativitätstheorie), Theo III (Quantenmechanik) und Theo IV (statistische Mechanik) werden wohl ebenfalls entstehen und im Internet unter <http://www.jkrieger.de/physik/index.html> veröffentlicht werden.

Der Stoffkanon orientiert sich an den Vorlesungen, wie sie an der Universität Heidelberg gehalten werden. Ich habe die Theo I bei Prof. D.W. Heermann gehört (eine Bewertung des Dozenten möge jedem Hörer selbst überlassen bleiben ;-). Die Darstellungen orientieren sich zusätzlich vornehmlich an den im Literaturverzeichnis angegebenen Quellen (vor Allem [Kuypers 1993]) und den weiterführenden Links.

2. Newton'sche Mechanik

Die Newton'sche Mechanik wird hier für ein Teilchen aufgestellt. Besteht das System aus N Teilchen, so erhält man $3N$ Ortskoordinaten q_i und $3N$ Impulse p_i . Außerdem muss es dann entsprechen eine Bewegungsgleichung für jedes Teilchen geben. Man muss also in den unten aufgeführten Formeln nur einen Index i ergänzen.

2.1. Newton'sche Axiome

Die Newton'sche Mechanik postuliert die folgenden drei Axiome, aus denen die Bewegungsgleichungen von Massenpunkten (und Körpern) hergeleitet werden können:

Satz 2.1 (Newton'sche Gesetze) 1. **Trägheitssatz:** Ein Körper verharrt in seinem Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen geradlinigen Bewegung ($\vec{v} = 0$), solange die Summe aller auf ihn einwirkenden Kräfte Null ist.

2. **Aktionsprinzip/Bewegungsgleichung:** Die Änderung der Bewegung einer Masse ist der Einwirkung der bewegendes Kraft \vec{F} proportional und geschieht nach der Richtung derjenigen geraden Linie, nach welcher jene Kraft wirkt:

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} \quad \ddot{\vec{r}} = \frac{1}{m} \cdot \vec{F} \propto \vec{F}. \quad (2.1.1)$$

Die Konstante m heißt träge Masse und ist eine innere Eigenschaft der Teilchen

3. **Reaktionsprinzip:** Kräfte treten immer paarweise auf. Übt ein Körper A auf einen anderen Körper B eine Kraft aus (actio), so wirkt eine gleichgroße, aber entgegengerichtete Kraft von Körper B auf Körper A (reactio):

$$\vec{F}_{A \rightarrow B} = -\vec{F}_{B \rightarrow A} \quad (2.1.2)$$

Eine Bemerkung zum 2. Axiom muss noch gemacht werden: Die angegebene Form gilt nur für konstante Masse ($\dot{m} = 0$). Diese Bedingung ist in der nicht-relativistischen Mechanik üblicherweise erfüllt. Es gibt allerdings Systeme, in denen sie nicht gilt (z.B. Raketen, die ständig Treibstoff verlieren). Dann muss man zur folgenden, allgemeineren Definition übergehen, die den Impuls $\vec{p} = m \cdot \vec{v} = m \cdot \dot{\vec{r}}$ enthält:

$$\dot{\vec{p}} = \frac{d(m \cdot \vec{v})}{dt} = \frac{d(m)}{dt} \cdot \vec{v} + m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}. \quad (2.1.3)$$

2.2. Aufstellen der Bewegungsgleichungen

Es stellt sich also „nur“ noch die Frage, wie man die Kräfte \vec{F} ermittelt, die auf einen Massenpunkt wirken. Sind sie einmal bekannt, so gibt (2.1.1) die Bewegungsgleichung an. Es handelt sich um eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung, die allerdings in Abhängigkeit von \vec{F} sehr schwer zu lösen sein kann. Um aus (2.1.1) ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung zu machen, kann man den Impuls $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$ eines Teilchens einführen. (2.1.1) geht dann in die folgende, mathematisch äquivalente Form über:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}} &= \vec{v} \\ \dot{\vec{p}} &= \vec{F} \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

Konservative Kräfte: Oft treten konservative Kräfte auf. Sie werden folgendermaßen durch ein Potential $V(\vec{x}, t)$ definiert:

Definition 2.1 (Konservative Kräfte) Eine Kraft $\vec{F}(\vec{x}, t)$ heißt konservativ, wenn es eine Potentialfunktion $V(\vec{x}, t) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, deren negativer räumlicher Gradient gleich der Kraft ist:

$$\vec{F}(\vec{x}, t) = -\vec{\nabla}V(\vec{x}, t) = -\frac{\partial V(\vec{x}, t)}{\partial \vec{r}} \quad (2.2.2)$$

Die folgenden Kräfte sind Beispiele konservativer Kräfte:

- **Federkraft (harmonisches Potential):** $V_{\text{Feder}}(\vec{x}) = k\vec{x}^2 \Rightarrow \vec{F}_{\text{Feder}}(\vec{x}) = -k\vec{x}$
- **Gravitationskraft (Kepler):** $V_{\text{Grav}}(r) = \gamma \frac{m_1 \cdot m_2}{r} \Rightarrow \vec{F}_{\text{Grav}}(\vec{r}) = -\gamma \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$

Ein Gegenbeispiel ist etwa die magnetische Kraft. Sie kann nur über ein Vektorpotential beschrieben werden, nicht über ein Skalarfeld.

2.3. Nebenbedingungen

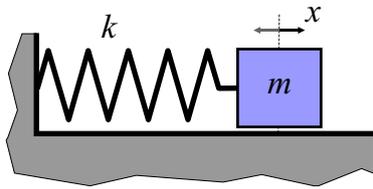


Abb. 2.1.: Federoszillator

Bisher wurden die Bewegungsgleichungen ohne Nebenbedingungen betrachtet. Im allgemeinen Fall wird die Bewegung eines Teilchens oder eines Körpers aber durch bestimmte Nebenbedingungen beschränkt sein. So kann sich etwa der Klotz in Abb. 2.1 nur auf der Tischplatte bewegen. Seine Bewegung ist also durch $y = \text{const}, z = \text{const}$ beschränkt. Solche Nebenbedingungen können i.A. mathematisch ausgedrückt werden. Man unterscheidet folgende Klassen von Nebenbedingungen:

- **holonome Nebenbedingung:** Die Zwangsbedingung kann durch eine Gleichung der folgenden Form beschrieben werden:

$$f(\vec{x}, t) = 0 \quad (2.3.1)$$

Wenn ein System aus N Teilchen besteht, so reduzieren k unabhängige holonome Zwangsbedingungen die Freiheitsgrade des Systems von $3N$ auf $3N - k$. Holonome Zwangsbedingungen beschränken die Bewegung also auf Flächen

- **nicht-holonome Zwangsbedingungen:** Lassen sich die Zwangsbedingungen nicht durch Gleichungen der Form (2.3.1) beschreiben, so heißen sie nicht-holonom. Solche Zwangsbedingungen schränken die Bewegung z.B. auf einen Raumbereich ein (Ungleichungen, z.B. $f(\vec{x}, t) \leq c$).

Zusätzlich unterteilt man Zwangsbedingungen danach, ob sie explizit von der Zeit abhängen (**rheonom**) oder nicht (**skleronom**). Im zweiten Falle gilt natürlich:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

Die Zwangsbedingungen implizieren im Newton-Bild eine Zwangskraft $Z(\vec{x}, t)$, die zusätzlich zur externen $\vec{F}(\vec{x}, t)$ wirkt. Aus der Newton'schen Bewegungsgleichung (2.1.1) wird dann:

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \vec{Z} \quad (2.3.2)$$

Die Analyse von mechanischen Systemen mit Zwangsbedingungen kann im Newton-Bild mathematisch sehr kompliziert werden. Deswegen geht man zur Lagrange'schen oder Hamilton'schen Beschreibung der Mechanik über. Diese sind dem Newton-Bild aber äquivalent, leisten also nicht mehr. Sie sind nur mathematisch u.U. leichter zu fassen.

2.4. Das d'Alembert'sche Prinzip

Wie eben beschrieben, kann man im Prinzip die Bewegungsgleichungen eines Systems aufstellen, wenn man alle Kräfte \vec{F}_i und alle Zwangskräfte \vec{Z}_i kennt. In der Praxis ist dies oft schwierig, sodass man nach Verfahren sucht, die die Zwangskräfte nicht explizit mitführen. Eine erste Möglichkeit ist das d'Alembert'sche Prinzip. Dazu definiert man zuerst die *virtuelle Verrückung*:

Definition 2.2 (virtuelle Verrückung) Eine virtuelle Verrückung $\delta\vec{r}_i$ des i -ten Teilchens ist eine beliebige, infinitesimale Verschiebung des Teilchens, die bei festgehaltener Zeit geschieht. Die Verschiebung muss dabei mit den Zwangskräften verträglich sein.

Bei skleronomen, d.h. zeitunabhängigen Nebenbedingungen sind die Wege der wirklichen und der virtuellen Verrückungen gleich.

Man postuliert, dass die Zwangskräfte \vec{Z}_i dergestalt sind, dass sie keine virtuelle Zwangsarbeit $\sum_i \vec{Z}_i \cdot \delta\vec{r}_i$ verursachen.

Man kann sich das so vorstellen, dass man bei festgehaltener Zeit am System „rüttelt“ und beobachtet, wie es auf dieses Rütteln reagiert. Die virtuellen Verrückungen $\delta\vec{r}$ haben nichts mit realen Verschiebungen $d\vec{r}$ zu tun, die in der Zeit dt ablaufen. Bewegt sich etwa eine Perle auf einem Draht, der sich in y -Richtung bewegt und dabei parallel zur x -Achse steht, so können die $\delta\vec{r}$ nur parallel zum Draht verlaufen, während $d\vec{r}$ auch schräg dazu sein darf.

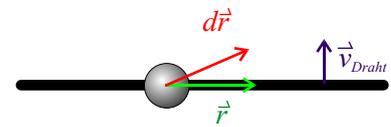


Abb. 2.2.: zur virtuellen Verrückung

Oben wurde erwähnt, dass die Zwangskräfte keine virtuelle Arbeit verrichten. Daraus und aus (2.3.2) erhält man sofort das *d'Alembert'sche Prinzip*:

Satz 2.2 (D'Alembert'sches Prinzip)

$$\sum_{i=1}^N (m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i) \cdot \delta\vec{r}_i = \sum_{i=1}^N \vec{Z}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0 \quad (2.4.1)$$

Diese Gleichung stellt eine Bewegungsgleichung für das System dar, die aus der postulierten Natur der Zwangskräfte folgt. Sie enthält die Zwangskräfte aber nicht mehr explizit.

3. Lagrange'sche Mechanik

3.1. Verallgemeinerte Koordinaten

Es ist oft nicht zweckmäßig in kartesischen Koordinaten zu rechnen, wie das bisher gemacht wurde. Oft gibt es Koordinatensysteme, die der Symmetrie des Systems besser angepasst sind. Dies können z.B. Kugelkoordinaten für kugelsymmetrische Systeme sein, oder auch Zylinderkoordinaten sein. Ein System aus N Teilchen, das durch N Ortsvektoren \vec{r}_i mit insgesamt $3N$ Komponenten beschrieben wird, kann natürlich genauso gut durch $3N$ generalisierte Koordinaten q_i beschrieben werden. Diese sind dann mit den \vec{r}_i durch Transformationsgleichungen

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, \dots, q_{3N}, t)$$

verknüpft. Solche Generalisierten Koordinaten können z.B. auch Winkel sein. So ist es z.B. bei einem mathematischen Pendel nicht sinnvoll mit den Koordinaten (x, y) der Masse zu rechnen, sondern eher mit dem Winkel φ , den das Pendel gerade ausgelenkt ist. Als zweite Koordinate könnte man weiterhin die y -Koordinate verwenden, die aber eindeutig mit dem Winkel in Beziehung steht (Nebenbedingung: Kreisbahn!).

Steht ein System unter k unabhängigen Zwangsbedingungen, so verringern diese die Anzahl der generalisierten (unabhängigen) Koordinaten um k . Ein solches System hat also $3N - k$ unabhängige Koordinaten.

3.2. Lagrange-Formalismus, Lagrange-Gleichungen 2. Art

Aus dem d'Alembert'schen Prinzip, lässt sich der Lagrange-Formalismus herleiten. Dazu führt man generalisierte Kräfte Q_i und Potentiale V ein. Diese hängen über eine der beiden folgenden Beziehungen zusammen:

$$Q_i = -\frac{\partial V(q_1, \dots, q_{3N-k}, t)}{\partial q_i}, \quad \text{oder} \quad Q_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i} + \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} \quad (3.2.1)$$

Im letzteren Fall hängt das Potential auch noch von den Geschwindigkeiten \dot{q}_i der generalisierten Koordinaten ab. Man spricht dann von einem verallgemeinerten Potential $V(q_1, \dots, q_{3N-k}, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{3N-k}, t)$, wie es etwa in der Elektrodynamik auftritt. Dort ist das Potential eines geladenen Teilchens im elektromagnetischen Feld φ, \vec{A} gerade $V = q \cdot (\varphi - \vec{v} \cdot \vec{A})$. Der *Lagrange-Formalismus* kann nun folgendermaßen formuliert werden:

Satz 3.1 (Lagrange-Formalismus) Für holonome Zwangsbedingungen und Kräfte, die sich (3.2.1) aus einem Potential $V(q_1, \dots, q_{3N-k}, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{3N-k}, t)$ herleiten lassen, definiert man die Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L} := T - V, \quad \text{mit} \quad T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i^2 \quad (3.2.2)$$

Dabei ist T die Summe der kinetischen Energien aller Teilchen des Systems und V die Summe der potentielle Energien aller Teilchen des Systems. Die Lagrange-Funktion ist natürlich eine Funktion der verallgemeinerten Koordinaten und deren Geschwindigkeiten, sowie der Zeit, also $\mathcal{L}(q_1, \dots, q_{3N-k}, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{3N-k}, t)$. Aus der Lagrange-Funktion \mathcal{L} eines Systems lassen sich über die sog. Lagrange-Gleichung zweiter Art

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0, \quad j = 1, \dots, 3N - k \quad (3.2.3)$$

Bewegungsgleichungen für das System herleiten.

Herleitung der Lagrange-Gleichungen: Die Lagrange-Gleichungen ergeben sich aus dem sog. Hamilton'schen Prinzip. Dazu führt man die sog. Wirkung $S[q]$ (Funktional) ein. Sie ist definiert durch:

Definition 3.1 (Wirkung, Hamilton-Prinzip)

1. **Wirkung:**

$$S[q] = \int_{t_0}^{t_1} L(q(t), \dot{q}(t), t) dt \quad (3.2.4)$$

Diese Größe hat die Dimension [Energie · Zeit].

2. **Hamilton'sches Prinzip:** Die Bewegung eines Systems $q(t)$ ergibt sich aus der folgenden Bedingung:

$$S[q] \text{ extremal} \Leftrightarrow \delta S[q] = 0 \quad (3.2.5)$$

Um nun aus dem Hamilton'schen Prinzip (3.2.5) die Euler-Lagrange-Gleichungen abzuleiten nutzt man die Variationsrechnung. Man variiert die Koordinate $q \rightarrow q' = q + \alpha d$, mit $\alpha \ll 1$. Dann geht $\delta S[q] = 0$ über in $\frac{dS}{d\alpha} = 0$:

$$\begin{aligned} 0 \stackrel{!}{=} \delta S[q] &= \frac{dS}{d\alpha} = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{d\alpha} L(q'(t), \dot{q}'(t), t) dt = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial L}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{\partial \dot{q}}{\partial \alpha} \right] dt = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial L}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \alpha} dt + \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \cdot \frac{\partial q}{\partial \alpha} \right]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \frac{\partial q}{\partial \alpha} dt = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial L}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \alpha} - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \frac{\partial q}{\partial \alpha} \right] dt = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right] \frac{\partial q}{\partial \alpha} dt \end{aligned}$$

Beim Übergang zur zweiten Zeile wurde eine partielle Integration durchgeführt. Der ausintegrierte Anteil $\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \cdot \frac{\partial q}{\partial \alpha} \right]_{t_0}^{t_1}$ wird 0, wenn man fordert, dass $q(t_0), q(t_1) = \text{const}$ und damit $\left. \frac{\partial q}{\partial \alpha} \right|_{t=t_0, t_1} = 0$. Aus der letzten Zeile folgt dann, dass das Argument des Integrals und damit der Inhalt der Klammern 0 sein muss:

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0$$

Forminvarianz unter Punkttransformationen: Die Lagrange-Gleichungen (oder auch Euler-Lagrange-Gleichungen) eines Systems sind unter *Punkttransformationen*

$$q_i \rightarrow Q_i = Q_i(q_1, \dots, q_{3N-k}, t) \quad (3.2.6)$$

forminvariant. Beispiele für solche Punkttransformationen sind etwa Wechsel des Koordinatensystems von kartesischen nach Kugelkoordinaten, oder der Wechsel in ein beschleunigtes Bezugssystem. Für die Bewegungsgleichungen, die nach Newton oder d'Alembert folgen gilt dies nicht.

Dissipationsfunktion/Reibung: In der bisherigen Definition können Reibungskräfte im Lagrange-Formalismus nicht dargestellt werden, weil sie sich nicht über ein Potential V darstellen lassen. Man kann aber die Lagrange-Gleichung um generalisierte Reibungskräfte R_i (oder allgemein, nicht über ein Potential darstellbare Kräfte) erweitern und erhält dann:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - R_i = 0, \quad j = 1, \dots, 3N - k \quad (3.2.7)$$

Diese generalisierten Reibungskräfte ergeben sich auf zwei Wegen:

1. Die Reibungskräfte \vec{R}_i in kartesischen Koordinaten (z.B. $\vec{R}_{\text{gleit}} = -\mu N \cdot \frac{\vec{v}}{v}$ für die Gleitreibung) werden einfach über die Transformationsgleichungen $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, \dots, q_{3N-k})$ umgeandelt:

$$R_j = \sum_{i=1}^N \vec{R}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$$

2. Viele Reibungskräfte haben die Form

$$\vec{R}_i = -h_i(v_i) \frac{\vec{v}_i}{v_i}, \quad i = 1, \dots, N$$

Dies bedeutet eine Kraft, die der Bewegung entgegenwirkt und von der Geschwindigkeit abhängt. Dafür kann man die Dissipationsfunktion P definieren, mit der dann gilt:

$$R_j = -\frac{\partial P}{\partial \dot{q}_j}, \quad \text{mit} \quad P := \sum_{i=1}^N \int_0^{v_i} h_i(x) dx$$

verallgemeinerte Impulse/konjugierte Impulse:

Definition 3.2 (Kanonischer Impuls) Der kanonische Impuls oder auch verallgemeinerte Impuls p_i zu einer verallgemeinerten Koordinate q_i ist definiert als

$$p_i := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \quad (3.2.8)$$

Für geschwindigkeitsunabhängige Potentiale $V \equiv V(q_1, \dots, q_{3N-k}, t)$ sind der kinematische und der kanonische Impuls gleich. Für allgemeine Potentiale gilt dies nicht mehr.

3.3. Symmetrien und Erhaltungsgrößen

Definition 3.3 (Erhaltungsgröße) Eine Funktion $f(q, \dot{q}, t)$ heißt Erhaltungsgröße (oder Konstante der Bewegung oder erstes Integral), wenn ihre totale zeitliche Ableitung für alle Bahnen q , die die zum System gehörenden Euler-Gleichungen erfüllen, 0 ist:

$$\dot{f} \equiv \frac{d}{dt} f(q, \dot{q}, t) = 0$$

Definition 3.4 (zyklische Koordinaten) Eine Koordinate q_i heißt zyklisch, wenn sie in der Lagrangefunktion \mathcal{L} , nur in ihrer zeitlichen Ableitung \dot{q}_i auftritt, also

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0.$$

Der konjugierte Impuls $p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$ zu dieser Koordinate q_i ist eine Erhaltungsgröße. Dies folgt direkt aus der Lagrange-Gleichung (3.2.7):

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}}_{=0} = \frac{d}{dt} p_i = 0$$

Kennt man für ein System Erhaltungsgrößen, so können diese die Integration des Systems vereinfachen und seine Dynamik einschränken:

- Ein System mit n Freiheitsgraden hat $2n$ unabhängige Erhaltungsgrößen.
- Jede Erhaltungsgröße verringert die Zahl der erforderlichen Integrationen um eins.
- Bei „genügend vielen“ Erhaltungsgrößen kann ein System nicht chaotisch sein.

Um auf das Noether-Theorem zu kommen betrachtet man Koordinatentransformationen $q_i \rightarrow q'_i = q'_i(q_1, \dots, q_{3N-k}, t, \alpha)$, $1, \dots, 3N - k$ (z.B. Verschiebungen, Rotationen etc.), die die Lagrange-Funktion \mathcal{L} des Systems nicht ändern. Für diese Transformationen fordert man weiter:

1. Eine Transformation $q_i \rightarrow q'_i = q'_i(q_1, \dots, q_{3N-k}, t, \alpha)$ muss invertierbar sein, also muss auch $q_i = q_i(q'_1, \dots, q'_{3N-k}, t, \alpha)$ existieren.
2. Die Transformation $q'_i = q'_i(q_1, \dots, q_{3N-k}, t, \alpha)$ soll in einem kontinuierlichen Parameter α stetig differenzierbar sein. Für $\alpha = 0$ soll sich die identische Transformation $q_i = q'_i(\vec{q}, t, \alpha = 0)$ ergeben.

Ein Beispiel für eine solche Transformation ist die Translation $\vec{r} \rightarrow \vec{r}' = \vec{r} + \alpha \cdot \vec{a}$.

Setzt man die transformierten Koordinaten in die Lagrange-Funktion \mathcal{L} des Systems ein, so ergibt sich eine neue Lagrange-Funktion \mathcal{L}' :

$$\mathcal{L}'(q', p', t, \alpha) := \mathcal{L}\left(q(q', t, \alpha), \frac{d}{dt}q(q', t, \alpha), t\right) = \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$$

Nun untersucht man die Abhängigkeit von \mathcal{L}' vom Parameter α der Transformation, indem man die partielle Ableitung nach α betrachtet:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \alpha} &= \sum_{i=1}^{3N-k} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \frac{\partial q_i(q', t, \alpha)}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \left(\frac{d}{dt}q_i(q', t, \alpha)\right)}{\partial \alpha} \right] = \\ &= \sum_{i=1}^{3N-k} \left[\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) \frac{\partial q_i(q', t, \alpha)}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial q_i(q', t, \alpha)}{\partial \alpha}\right) \right] = \\ &\stackrel{\text{Produktregel}}{=} \frac{d}{dt} \left[\sum_{i=1}^{3N-k} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \cdot \frac{\partial q_i(q', t, \alpha)}{\partial \alpha} \right] \end{aligned}$$

Man betrachtet nun diese Rechnung nach der Differenziation (die für alle α gilt) an der Stelle $\alpha = 0$, sodass die Koordinaten q' wieder in die alten Koordinaten q übergehen. Gilt nun für eine Transformation $q_i \rightarrow q'_i$, dass sie die Lagrange-Funktion invariant lässt, dass also $\mathcal{L}'(q', \dot{q}', t) = \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$, so kann die Lagrange-Funktion \mathcal{L} nicht explizit von α abhängen, es gilt also $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha} = 0$ und der letzte Term in obiger Rechnung definiert eine Erhaltungsgröße $I(q, \dot{q}, t)$:

$$\frac{d}{dt} \left[\underbrace{\sum_{i=1}^{3N-k} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \cdot \frac{\partial q_i(q', t, \alpha)}{\partial \alpha}}_{=I(q, \dot{q}, t)} \Big|_{\alpha=0} \right] = 0$$

Man kann das bisherige Resultat noch erweitern: Man erhält nämlich auch dann noch eine Erhaltungsgröße, wenn die Lagrange-Funktion nicht gänzlich ungeändert bleibt, die Änderung aber nur in einem zusätzlichen Term der Form $\frac{d}{dt}F(q', t, \alpha)$ besteht. Dann ist die folgende Größe eine Erhaltungsgröße:

$$J = \sum_{i=1}^{3N-k} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i(q', t, \alpha)}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} - \frac{\partial F(q', t, \alpha)}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0}$$

Eine solche Änderung der Lagrange-Funktion nennt man Umeichung. Aufgrund der Eich-Invarianz der Lagrange-Funktion führt eine umgeechte Lagrange-Funktion auf die selben Bewegungsgleichungen. Man nennt eine Transformation $q_i \rightarrow q'_i$, die die Lagrange-Funktion bis auf eine Umeichung invariant lässt auch *Symmetrietransformation*. Die Umeichung kann natürlich auch identisch 0 sein, wodurch sich obige (einfachere) Fassung ergibt.

Diese Ergebnisse lassen sich wie folgt zusammenfassen:

NOETHER-Theorem:

Satz 3.2 (Noether-Theorem) Ist die Lagrangefunktion \mathcal{L} eines Systems bis auf ein totales zeitliches Differential invariant unter einer Punkttransformation $q_i \rightarrow q'_i = q'_i(q_1, \dots, q_{3N-k}, t, \alpha)$ (mit $q'_i(\alpha = 0) = q_i$ und in α stetig differenzierbar), also:

$$\mathcal{L}'(q', \dot{q}', t, \alpha) = \mathcal{L}(q', \dot{q}', t) + \frac{d}{dt} F(q', t, \alpha),$$

so ist

$$J = \sum_{i=1}^{3N-k} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i(q', t, \alpha)}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} - \frac{\partial F(q', t, \alpha)}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} \quad (3.3.1)$$

eine Erhaltungsgröße. Für $F \equiv 0$ ist auch die einfachere Größe

$$I(q, \dot{q}, t) = \sum_{i=1}^{3N-k} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i(q', t, \alpha)}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} \quad (3.3.2)$$

erhalten.

Das Noether-Theorem besagt, dass es zu jeder Symmetrietransformation eine Erhaltungsgröße gehört, die leicht bei Kenntnis der Transformation berechnet werden kann. Seine Umkehrung gilt im Rahmen der Lagrange'schen Mechanik nicht. Es gibt also durchaus Erhaltungsgrößen, zu denen keine Symmetrietransformation bekannt ist (z.B. Runge-Lenz-Vektor).

4. Hamilton'sche Mechanik

4.1. Einleitung

Es wird ein System aus N Teilchen mit k holonomen Zwangsbedingungen betrachtet. Ein solches System hat $n = 3N - k$ Freiheitsgrade. Die Lagrange-Gleichungen beschreiben dieses System nun durch n Differentialgleichungen 2. Ordnung. Man kann es aber durch Einführung der kanonischen Impulse $p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$ in ein System von $2n$ DGLn 1. Ordnung überführen. Damit beschreibt man dann die Entwicklung des Systems in einem $2n$ -dimensionalen Raum, dem sog. *Phasenraum*. Für einen harmonischen Oszillator wird dieser Raum z.B. durch die Koordinate q und den Impuls p aufgespannt. Die harmonische Schwingung entspricht dann einer Ellipse im Phasenraum.

Möchte man nun ein System, das durch die Lagrange-Funktion $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$ beschrieben wird durch eine Funktion $H(q, p, t)$ beschreiben, wobei $p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$ die kanonischen Impulse sind, so benötigt man eine Transformation, die diesen Übergang ermöglicht, die also aus \mathcal{L} die Funktion H konstruiert. Eine Transformation die dieses leistet ist die *Legendre-Transformation*, die nun genauer definiert werden soll.

Legendre-Transformation: Eine Legendre-Trafo beschreibt den Übergang der Variablen x, y einer Funktion $f(x, y)$ zu neuen Variable $u := \frac{\partial f}{\partial x}, y$ in einer Funktion $g(u, y)$. Das Problem wird also von einer neuen Funktion mit neuen Variablen beschrieben; der beschriebene Sachverhalt soll dabei aber gleich bleiben. In einer Dimension erhält man dann

$$g(u, y) := f(x, y) - u \cdot x, \quad u = \frac{\partial f}{\partial x} \quad (4.1.1)$$

4.2. Hamilton-Gleichungen

In der Hamilton'schen Mechanik ist die Hamilton-Funktion von zentraler Bedeutung. Sie wird als Legendre-Transformierte des Lagrange-Funktion eingeführt:

Definition 4.1 (Hamilton-Funktion)

$$H(q, p, t) := \sum_{i=1}^n \dot{q}_i \cdot p_i - \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) \quad (4.2.1)$$

Die Hamilton-Funktion $H(q, p, t)$ darf keine Geschwindigkeiten enthalten. Deswegen muss in (4.2.1) auf der rechten Seite $\dot{q}_i = \dot{q}_i(q, p, t)$ eingesetzt werden, um \dot{q}_i zu eliminieren. Betrachtet man das totale Differential dieser Funktion, so erhält man:

$$dH = \sum_{i=1}^n \left(\dot{q}_i dp_i + p_i d\dot{q}_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt = \sum_{i=1}^n (\dot{q}_i dp_i - p_i dq_i) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt$$

Im letzten Schritt wurde die Definition der kanonischen Impulse $p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$ verwendet. Außerdem kam die Umformung der Euler-Lagrange-Gleichung zum Einsatz: $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{d}{dt} p_i = \dot{p}_i$. Andererseits erhält man allgemein:

$$dH = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt$$

Aus dem Vergleich dieser zwei Versionen des totalen Differentials erhält man die Hamilton'schen-Bewegungsgleichungen:

Satz 4.1 (Hamilton'sche Bewegungsgleichungen)

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad p_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \quad (4.2.2)$$

Man sieht also, dass die Angabe der Hamilton-Funktion eines Systems zu dessen Beschreibung vollkommen ausreicht, da sich auch ihr $2n$ Bewegungsgleichungen 1. Ordnung ableiten lassen, die die Lösung des Systems beschreiben. Damit ist der Ansatz über die Hamilton-Funktion äquivalent der Lagrange'schen Methode.

Man kann die Hamilton-Funktion in bestimmten Fällen wesentlich leichter aufstellen, als durch (4.2.1):

Satz 4.2 (Energie und Hamilton-Funktion) Für skleronome, holonome Zwangsbedingungen, ruhende Koordinaten und konservative Kräfte gilt:

$$H(q, p, t) := T + V \quad (4.2.3)$$

4.3. Poisson-Klammern

Die Hamilton-Gleichungen lassen sich noch etwas anders schreiben. Dazu verwendet man die sog. Poisson-Klammern $[\cdot, \cdot]$. Diese Schreibweise ist nützlich, da nach dem Korrespondenz-Prinzip der Quantenmechanik die Poisson-Klammern in Kommutatoren übergehen, wodurch man die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen aus der klassischen Mechanik in die Quantenmechanik übernehmen kann. Man betrachtet hier Funktionen f der Variablen $q_i(t), p_i(t)$ und der Zeit t , die als *Observable* eines Systems bezeichnet werden. Die Funktion q, p ergeben sich aus der Hamilton-Funktion $H(q, p, t)$ des betrachteten Systems.

Definition 4.2 (Poisson-Klammern)

1. **Definition:**

$$[f, g]_{q,p} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right) \quad (4.3.1)$$

2. **Rechenregeln und Eigenschaften:**

- a) *Linearität:* $[c_1 f + c_2 g, h] = c_1 [f, h] + c_2 [g, h]$
- b) *Antisymmetrie:* $[f, g] = -[g, f]$
- c) *Nullelement:* $[c, f] = 0$, mit $c = \text{Konstante}$
- d) *Produktregel:* $[fg, h] = f[g, h] + g[f, h]$
- e) *Jacobi-Identität:* $[f, [g, h]] + [g, [h, f]] + [h, [f, g]] = 0$
- f) *fundamentale Poisson-Klammern:* $[q_i, q_j] = [p_i, p_j] = 0 \quad [q_i, p_j] = \delta_{ij}$

Mit dieser mathematischen Definition kann man eine Reihe von physikalischen Aussagen recht einfach formulieren:

1. **zeitliche Ableitung einer Observablen $f(q, p, t)$:**

$$\frac{df}{dt} = [f, H] + \frac{\partial f}{\partial t} \quad (4.3.2)$$

2. **Observablen als Erhaltungsgrößen:** Eine Observable f ist genau dann eine Erhaltungsgröße des Systems, wenn gilt:

$$[f, H] = 0 \quad (4.3.3)$$

3. **Hamilton'sche Bewegungsgleichungen:**

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = [q_i, H] \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = [p_i, H] \quad (4.3.4)$$

A. Weblinks

A.1. Allgemeines

-

A.2. Lagrange'sche Mechanik

- <http://de.wikipedia.org/wiki/Lagrange-Multiplikator>
- <http://de.wikipedia.org/wiki/Lagrange-Formalismus>
- http://de.wikipedia.org/wiki/Symmetrie_%28Physik%29
-

A.3. Hamilton'sche Mechanik

- <http://de.wikipedia.org/wiki/Hamilton-Formalismus>
-

Literaturverzeichnis

- [Arnold 1989] *Arnold, V. I. (1989): Mathematical Methods of Classical Mechanics*, 2. Auflage, New York - Berlin - Heidelberg: Springer.
- [Boas 1983] *Boas, Mary L. (1983): Mathematical Methods In The Physical Science*, 2. Auflage, New York - Brisbane - Toronto - Singapore: Wiley.
- [Cohen-Tannoudji u.a. 1999] *Cohen-Tannoudji, Claude / Diu, Bernard / Laloë, Franck (1999): Quantenmechanik 2*, 2. Auflage, Berlin - New York: Walter de Gruyter.
- [Demtröder 2002] *Demtröder, Wolfgang (2002): Experimentalphysik 1. Mechanik und Wärme*, 3. Auflage, New York - Berlin - Heidelberg: Springer Verlag.
- [Fließbach 2003] *Fließbach, Thorsten (2003): Lehrbuch zur Theoretischen Physik 1. Mechanik*, 4. Auflage, o.O. Spektrum Akademischer Verlag.
- [Jelitto 1991] *Jelitto, Rainer J. (1991): Theoretische Physik. Mechanik*. o.O. Aula.
- [Kuypers 1993] *Kuypers, Friedhelm (1993): Klassische Mechanik*, 4. Auflage, Weinheim - New York - Basel - Cambridge: VCH.
- [van Hees 2005] *van Hees, Hendrik (2005): Statistische Physik*. 18.01.2005 (URL: <http://theory.gsi.de/~vanhees/faq/stat/index.html>)
- [Wiedemann 2004] *Wiedemann, Harald (2004): Numerische Physik*. New York - Berlin - Heidelberg: Springer.