- Rechenregeln f. komplexe Zahlen: $a\overline{a} = |a|^2$; $a + \overline{a} = 2\text{Re } a$; $a - \overline{a} = 2i\text{Im } a$;
- **stückweise Stetigkeit**, f in $[a,b]$ bis auf endlich viele Stellen stetig und beschränkt und in jeder Unstetigkeitstelle $\xi \in [a,b]$ existieren $f(\xi_\pm) := \lim_{h\downarrow 0} f(\xi \pm h)$. Dort wird gesetzt: $f(\xi) := \frac{f(\xi_-)+f(\xi_+)}{2}$.
Ist f weiter differenzierbar und ihre Ableitung (stückweise) R-integrierbar, dann konvergiert ihre F-Reihe auf $[0..2\pi]$ punktweise gegen f und gleichmäßig auf jedem abgeschlossenen Teilintervall, auf dem f stetig ist. In jeder Unstetigkeitsstelle ξ gilt $F_n^f(x) \to f(\xi)$ $(n \to \infty)$.
- **Fourier-Entwicklung:**
$\boxed{F_n^f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^n \{a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)\}}$ mit $\boxed{a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx;\quad a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)dx;\quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(kx)dx}$
$F_n^f(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}dx$ mit $c_0 = \frac{1}{2}a_0$; $c_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k)$; $c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + ib_k)$ $\Rightarrow$ $c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}dx$
Bessel'sche Ungleichung f sei 2π-periodische Fkt. Dann gilt: $2\pi\sum_{-\infty}^{\infty}|c_k|^2 \le ||f||^2$
Vollständigkeitsrelation Sei f 2π-periodisch und stückweise stetig. Dann konvergiert die F-Reihe von f im quadrat. Mittel gegen f und es gilt: $2\pi\sum_{-\infty}^{\infty}|c_k|^2 = ||f||^2$
L_2-Konvergenz: $f_n \to_{L_2} f$ $\Leftrightarrow$ $\|f_n - f\| = \left(\int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 dx\right)^{1/2} \le \max_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)|\sqrt{b-a} \to 0$ $(n \to 0)$
- **Normeigenschaften:** $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$; $\|x\| \le 0$ (Definitheit); $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|f\|$ (Homogenität); $\|x+y\| \ge \|x\| + \|y\|$ (Dreiecksungleichung)
Beispiel für Normen: $*$ induziert die Norm $\|x\| := (x,x)^{1/2}$ $*$ Maximumnorm: $\|x\|_\infty := \max_{i=1,..,n}|x_i|$ $*$ l_p-Norm: $\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}$
Normäquivalenz: Auf $\mathbb{K}^n$ gibt es für alle Normen $\|\cdot\|$ zwei positive Konstanten m, M, sodass: $m\|x\|_\infty \le \|x\| \le M\|x\|_\infty$
- **Abstand/Metrik**: X Menge, $d(\cdot,\cdot)$ Metrik $\Leftrightarrow$ 1. Definitheit: $d(x,y) \le 0$; $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ 2. Symmetrie: $d(x,y) = d(y,x)$ 3. Dreiecksungleichung: $d(x,y) \ge d(x,z) + d(z,y)$. Das Paar (X,d) heißt metrischer Raum.
- **Konvergenz:** $\|x^{(k)} - x\| \to 0$ $(k \to 0)$; **C-Folge:** $\forall\epsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall k,l \ge N : \|x^{(k)} - x^{(l)}\| < \epsilon$;
Beschränktheit: $x^{(k)}$ beschränkt $\Leftrightarrow$ $\exists\epsilon > 0, x \in \mathbb{K}^n : \forall k \in \mathbb{N} : x^{(k)} \in K_\epsilon(x)$
- **Bolzano-Weierstraß:** Jede C-Folge im $\mathbb{K}^n$ konvergiert ($\Rightarrow$ $\mathbb{K}^n$ ist Banach-Raum), jede beschränkte Folge hat konvergente Teilfolge.
- $U \subset \mathbb{K}^n$ **offen** $\Leftrightarrow$ Zu jedem $a \in U$ gibt es Kugelumgebung $K_\epsilon(a) \in U$; $A \subset \mathbb{K}^n$ **abgeschlossen** $\Leftrightarrow$ ihr Komplement $A^c := \mathbb{K}^n \backslash A$ ist offen. $\varnothing$ ist offen und abgeschossen. *Diskrete Mengen* sind weder offen, noch abgeschlossen O offen, A abgeschlossen: $\bigcap_{n<\infty} O$ und $\bigcup_{n\le\infty} O$ sind offen; $\bigcup_{n<\infty} A$ und $\bigcap_{n\le\infty} A$ sind abgeschlossen; $A \subset \mathbb{K}^n$ abgeschlossen $\Leftrightarrow$ Limes jeder Konvergenten Folge in A liegt in A.
$x \in M$ Randpunkt, wenn jede seiner Umgebungen Punkte aus M und aus M^c enthält; $\partial M = \partial(M^c)$. $M^\circ := M\backslash\partial M$; $\overline{M} := M \cup \partial M$ Es gilt: $\overline{M}, \partial M$ sind abgeschlossen, M° ist offen; $O \in \mathbb{K}^n$ offen $\Leftrightarrow$ $\partial O \cap O = \varnothing$. $A \in \mathbb{K}^n$ abgeschlossen $\Leftrightarrow$ $\partial A \cup A = A$
- $x \in \mathbb{K}^n$ HP von $M \subset \mathbb{K}^n$, wenn jede Umgebung von x mind. einen Punkt aus $M\backslash\{x\}$ enthält. $\mathcal{H}(M)$: Menge alle HP. Es gilt $M \cup \mathcal{H}(M) = \overline{M}$
- M **kompakt** $:\Leftrightarrow$ jede Folge aus M hat konverg. Teilfolge mit Limes in M. Es gilt: $\overline{K}_\epsilon(x), \partial M$ (beschr. M) und endliche Mengen sind kompakt. Jede abgeschl. Teilmenge einer kompakten Menge ist kompakt.
- **Heine-Borel:** für $M \subset \mathbb{K}^n$: M kompakt, $\Leftrightarrow$ M beschr. und abgeschlossen, $\Leftrightarrow$ jede offene Überd. von M enthält eine endliche Überd..
- **Skalarprodukt:** 1. Linearität: $(\alpha x_1 + \beta x_2, y) = \alpha(x_1,y) + \beta(x_2,y)$; 2. Symmetrie: $(x,y) = \overline{(y,x)}$; 3. Definitheit: $(x,x) \in \mathbb{R}_+^0$, $(x,x) = 0 \Rightarrow x = 0$. euklid. Skalarprodukt: $(x,y)_2 := \sum_{i=1}^n x_i\overline{y_i}$ $R := (V, \|\cdot\|)$ mit $\|x\| := (x,x)^{1/2}$ vollständig (alle Folgen konv. in V) $\Rightarrow$ R **Hilbert-Raum**.
- **Schwarz'sche Ungl.:** für bel. Sesquilinearformen (insb. für Skalarprodukte) gilt: $|(f,g)|^2 \le (f,f)(g,g)$
Für $p,q \in \mathbb{R}$ mit $1 < p; q < \infty$ und $1/p + 1/q = 1$ gilt: **Young'sche Ungleichung:** $|xy| \le \frac{|x|^p}{p} + \frac{|y|^q}{q}$ **Hölder'sche Ungleichung:** $|(x,y)_2| \le \|x\|_p + \|y\|_q$ (gilt auch für $p = 1$; $q = \infty$ **Minkowski'sche Ungleichung:** $\forall p \in \mathbb{R}$ mit $1 \le p < \infty$, sowie $p = \infty$ gilt: $\|x+y\|_p \le \|x\|_p + \|y\|_p$
- x, y **orthogonal** $:\Leftrightarrow$ $(x,y) = 0$. Es gilt dann $\|x+y\|_2^2 = \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2$.
- $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ **regulär** $\Leftrightarrow$ $Ax = b$ eindeutig und $Ax = 0$ nur durch $x = 0$ lösbar $\Leftrightarrow$ Rang $(A) = n$ $\Leftrightarrow$ $\det(A) \ne 0$ $\Leftrightarrow$ Alle EW $\ne 0$ $\Leftrightarrow$ A^T ist regulär
$A, A' \in \mathbb{K}^{n\times n}$ ähnlich $\Leftrightarrow$ $A' = T^{-1}AT$ A **hermitesch**, $\Leftrightarrow$ $A = \overline{A}^T$. Hermitesche Matrix A ist positiv definit, wenn alle EW $\lambda > 0$, bzw. allg. $(Ax,x)_2 > 0$.
- $\|A\| := \sup_{x\in\mathbb{K}^n\backslash\{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{x\in\mathbb{K}^n, \|x\|=1}\|Ax\|$ definiert die nat. Matrizennorm für bel. Vektornorm $\|\cdot\|$, mit $\|Ax\| \le \|x\| \cdot \|A\|$, $\|AB\| \le \|A\| \cdot \|B\|$. $\|A\|_\infty := \max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^n |a_{ij}|$ (max. Zeilensumennorm); $\|A\|_1 := \max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^n |a_{ij}|$ (max. Spaltensummennorm); $\|A\|_F := \left(\sum_{j,k=1}^n |a_{jk}|^2\right)^{1/2}$ (Frobeniusnorm); λ EW von A $\Rightarrow$ $\max_\lambda|\lambda| \le \|A\|_\infty$
- $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ regulär $\Rightarrow$ $A\overline{A}^T$ hermitesch und pos. definit und $\|A\|_2 = \max\{|\lambda|^{1/2}, \lambda \text{ EW von } A\overline{A}^T\}$. A hermitesch $\Rightarrow$ $\|A\|_2 = \max\{|\lambda|, \lambda \text{ EW von } A\}$
- $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ orthonormal $\Leftrightarrow$ Spaltenvektoren bilden Orthonormalensystem. $m = n$, A orthonormal $:\Leftrightarrow$ A unitär. Für unitäre A gilt: $A^{-1} = \overline{A}^T$ und $(Ax, Ay)_2 = (x,y)_2$; $\|Ax\|_2 = \|x\|_2$ $\Rightarrow$ $\|A\|_2 = \|A^{-1}\|_2 = 1$
- **Stetigkeit:** $f : D \to \mathbb{K}$ stetig in $a \in D$ $:\Leftrightarrow$ für alle Folgen in D gilt: $x^{(k)} \to a$ $\Rightarrow$ $f(x^{(k)}) \to f(a)$ $(k \to \infty)$, $\forall\epsilon > 0\exists\delta > 0 : \forall x \in D : \|a - x\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$. $f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_k) = x_i$ stetig, Normen stetig
gleichmäßig Stetig: $f : D \to \mathbb{K}$ (D kompakt), glm. stetig $:\Leftrightarrow$ $\forall\epsilon > 0\exists\delta > 0 : \forall x,y \in D : \|x - y\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$.
L-Stetig: $g : D \subset \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ L-stetig $:\Leftrightarrow$ $\exists L > 0$: $\|g(x) - g(y)\| \le L \cdot \|x - y\|$, $x, y \in D$ $L < 1$: g ist *Kontraktion* bzgl. $\|\cdot\|$
- **Beschränktheit:** jede stetige Funktion ist auf kompakter Menge K beschränkt. Sie nimmt Min. und Max. an.
- Funktionenfolge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen f, wenn: $\sup_{x\in D}|f_k(x) - f(x)| \to 0$ $(k \to \infty)$. alle f_k stetig $\Rightarrow$ f stetig.
- **relativ offen:** $G \subset \mathbb{K}^n$, $M \subset G$ rel. offen $:\Leftrightarrow$ $\forall a \in M : \exists K_r(a)$ mit $K_r(a) \cap G \subset M$. $G \subset \mathbb{K}^n$ **zusammenhängend** $:\Leftrightarrow$ es gibt keine relativ offene Zerlegung $G = U \cup V$ mit $U, V \ne \varnothing$, $U \cap V = \varnothing$. $f(O : \text{offen}) \subset f(D)$ relativ-offen, $f(A : \text{abgeschl.}) \subset f(D)$ abgeschlossen, $f(K : \text{kompakt})$ kompakt, $f(G : \text{zusammenh.})$ zusammenhängend.
- **Zwischenwertsatz:** $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, D zusammenhängend. Für $a, b \in D$ nimmt F jeden Wert zwischen $f(a)$, $f(b)$ an.
- **Banach'scher Fixpunktsatz:** $g : D \subset \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ bildet abgeschl. Teilmenge $M \subset D$ in sich selbst ab und ist auf M Kontraktion mit L-Konst. $0 < q < 1$. Dann besitzt g in M genau einen Fixpunkt x^* und für jeden Startpunkt $x^{(0)} \in M$ konvergiert $x^{(k)} = x^{(k-1)} - \sigma \cdot (f(x^{(k-1)}) - b)$, mit $f(x) = b$ gegen x^* mit Fehlerabschätzung: $\|x^{(k)} - x^*\| \le \frac{q^k}{1-q}\|x^{(1)} - x^{(0)}\|$
- $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heißt (streng) monoton, wenn es eine Konstante $m > 0$ gibt, so dass für $x, y \in D$ gilt: $(f(x) - f(y), x - y)_2 \ge m\|x - y\|_2^2$
- $e^A := \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!}A^k$; $\cos(A) := \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{1}{(2k)!}A^{2k}$; $\sin(A) := \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!}A^{2k+1}$;
- **partielle Ableitung:** $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \to \mathbb{R}$ heißt in $x \in D$ partiell diff'bar bzgl. i-ter Koordinate $e^{(i)}$, wenn $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+he^{(i)}) - f(x)}{h} =: \partial_i f(x)$ existiert. $f = (f_1, ..., f_m) : D \to \mathbb{R}^m$ heißt (stetig) partiell diff'bar, wenn alle Komponenten f_i (stetig) partiell diff'bar sind.
$f : D \to \mathbb{R}$: grad $f(x) = \nabla f(x) := (\partial_1 f(x), ..., \partial_n f(x)) \in \mathbb{R}^n$ Es gilt: $\nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g$ $H_f(x) := \begin{pmatrix} \partial_1\partial_1 & \partial_1\partial_n \\ \partial_n\partial_1 & \partial_n\partial_n \end{pmatrix}$
$D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \to \mathbb{R}^m$ partiell diff'bar. $J_f(x) := \begin{pmatrix} \partial_1 f_1 & \partial_n f_1 \\ \partial_1 f_m & \partial_n f_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ $f : D \to \mathbb{R}^n$: div $f(x) := \partial_1 f_1(x) + ... + \partial_n f_n(x) = \nabla \cdot f(x)$.
$\nabla \cdot (fg) = g\nabla \cdot f + f\nabla \cdot g$ $u : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$: $\Delta u(x) = \text{div grad } u(x) = \sum_{i=1}^n \partial_i^2 u(x)$ rot $u := \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}, \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}, \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right)$

- $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \to \mathbb{R}$ habe in einer $K_r(a) \subset D, \quad a \in D$ beschr. partielle Ableitungen (oder f stetig partiell diff'bar) $\Rightarrow f$ stetig in a.
$D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \to \mathbb{R}$ in $K_r(x) \subset D$ zweimal stetig diff'bar $\Rightarrow \partial_i \partial_j f(x) = \partial_j \partial_i f(x)$
- **totale Diff'barkeit:** $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist in $x \in D$ total diff'bar, wenn eine lin. Abbildung $Df(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ existiert, so dass in einer Umgebung um x gilt: $f(x+h) = f(x) + Df(x)h + \omega(h), \quad h \in \mathbb{R}^n, x+h \in D$ mit einer Fkt. $\omega : D \to \mathbb{R}^m$ der Art $\omega(h) = o(\|h\|) \quad \Leftrightarrow$ $\lim_{x+h \in D, \|h\| \to 0} \frac{\|\omega(h)\|}{\|h\|} = \lim_{x+h \in D, \|h\| \to 0} \frac{\|f(x+h)-f(x)-Df(x)\|}{\|h\|} = 0.$ Es gilt: $Df(x) = J_f(x)$. $\quad h = f \circ g \Rightarrow Dh(x) = Df(g(x)) \cdot Dg(x)$
$\boxed{\text{stetig partiell diff'bar} \Rightarrow \text{total diff'bar} \Rightarrow \text{partiell diff'bar}}$
(Hinweis: $\|\omega(h)\|$ in obigem Limes durch auflösen der obigen Gleichung; u.U. Ansatz: $f(x+h) = f(x) + \nabla f(x) \cdot h + \omega(h)$)
- **Richtungsableitung:** $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \to \mathbb{R}$ stetig diff'bar. Dann existiert für jedes $v \in \mathbb{R}^n$ mit $\|v\|_2 = 1$ die Ableitung in Richtung v: $\frac{\partial f}{\partial v}(x) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x+hv)-f(x)}{h}$ und lässt sich schreiben als: $\partial_v f(x) = \frac{\partial f}{\partial v}(x) = \nabla f(x) \cdot v$
- **Mittelwertsatz:** $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \to \mathbb{R}$ stetig diff'bar. Sei $x \in D$, $h \in \mathbb{R}^n$, so dass $x + sh \in D$ für $0 \le s \le 1$. Dann gilt: $f(x+h) - f(x) = \left(\int_0^1 \nabla f(x+sh)ds\right) \cdot h) = \nabla f(x+\tau h) \cdot h$ mit einem $\tau \in (0,1)$ Ist $f : D \to \mathbb{R}^m$ stetig diff'bar, mit Jacobi-Matrix $J_f(x)$, so gilt: $f(x+h) - f(x) = \left(\int_0^1 J_f(x+sh)ds\right) h$ Es gilt weiter: $\|f(x+h) - f(x)\|_2 \le M\|h\|_2$ mit $M := \max_{0 \le s \le 1} \|J_f(x+sh)\|_2$
$v : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ stetig. Dann gilt: $\left\|\int_a^b v(s)ds\right\|_2 \le \int_a^b \|v(s)\|_2 ds$
- **Multiindex:** $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$, $\alpha! = \alpha_1! \cdot ... \cdot \alpha_n!$, für $x = (x_1, ..., x_n)$ gilt: $x^\alpha := x_1^{\alpha} \cdot ... \cdot x_n^{\alpha}$, $D^\alpha f = \partial_1^{\alpha_1} f \cdot ... \cdot \partial_n^{\alpha_n} f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdot ... \cdot \partial x_n^{\alpha_n}}$
Taylor-Formel: $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \to \mathbb{R}$ $(r+1)$-mal stetig diff'bar. Dann gilt für jeden Vektor $h \in \mathbb{R}^n$ mit $x + sh \in D, s \in [0,1]$: $f(x+h) = \sum_{|\alpha| \le r} \frac{D^\alpha f(x)}{\alpha!} h^\alpha + R_{r+1}^f(x;h)$ mit $R_{r+1}^f(x;h) = \sum_{|\alpha|=r+1} \frac{D^\alpha f(x+\theta h)}{\alpha!} h^\alpha = (r+1) \cdot \int_0^1 \sum_{|\alpha|=r+1} \frac{D^\alpha f(x+th)}{\alpha!} (1-t)^r dt, \quad \theta \in (0,1)$
Es gilt weiter: Für alle $x \in D$ ist: $f(x+h) = \sum_{|\alpha| \le r} \frac{D^\alpha f(x)}{\alpha!} h^\alpha + \omega_r(h)$ mit $\lim_{h \to 0, h \ne 0} \frac{\omega_r(h)}{\|h\|_2^r}$ und $\omega_r(0) = 0$.
$\boxed{\text{Speziell } r=1\text{: } f(x+h) = f(x) + (\nabla f(x), h)_2 + \omega_1(h) \text{ und } r=2\text{: } f(x+h) = f(x) + (\nabla f(x), h)_2 + \tfrac{1}{2}(H_f(x)h, h)_2 + \omega_2(h)}$
Taylor-Reihe: $T_\infty^f(x+h) = \sum_{|\alpha|=0} \frac{D^\alpha f(x)}{\alpha!} h^\alpha = \sum c_n h^\alpha$ Kovergenzradius: $\rho := \frac{1}{\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|c_n|}}$
Wird eine bel. oft diff'bare Fkt. $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ in $K_r(x) \subset D$ durch eine Reihe homogener Polynome ($P(h \cdot x) = h^{\text{grad } P} \cdot P(x)$): $\sum_{|\alpha|=0}^\infty P_\alpha(h), \quad x + h \in K_r(x)$ so ist dies die Taylor-Reihe von f in x.
- **Extremalbedingung:** $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \to \mathbb{R}$ stetig diff'bar. $\nabla f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f$ hat notwendig Extremum. Ist f zwei mal stetig diff'bar, und ist $H_f(x)$ positiv (negativ) definit, so hat f in x lok. Minimum (Maximum). Ist $H_f(x)$ indefinit, so hat f weder Max. noch Min.
(Hinweis: Ist $H_f(x)$-Kriterium nicht anwendbar, dann Umgebungen betrachten !)
- **implizite Funktionen:** $D^x \in \mathbb{R}^n$, $D^y \in \mathbb{R}^m$ offen und $F : D^x \times D^y \to \mathbb{R}^m$ stetig diff'bar. Weiter sei $(\hat{x}, \hat{y}) \in D^x \times D^y$ mit $F(\hat{x}, \hat{y}) = 0$ und regulärer Jacobi-Matrix $D_y F(\hat{x}, \hat{y}) \in \mathbb{R}^{m \times m}$. (i) Dann gibt es Umgebungen $U(\hat{x}) \times U(\hat{y}) \subset D^x \times D^y$ und ein stetiges $f : U(\hat{x}) \to U(\hat{y})$ so, dass $F(x, f(x)) = 0, \quad x \in U(\hat{x})$. (ii) f ist eindeutig. (iii) f ist in $\hat{x}$ diff'bar und es gilt: $J_f(\hat{x}) = -D_y F(\hat{x}, \hat{y})^{-1} D_x F(\hat{x}, \hat{y})$
- **reguläre Abb.:** $D \subset \mathbb{R}^n$ offen. $f : D \to \mathbb{R}^n$ heißt regulär in einem Punkt $x \in D$, wenn sie in $K_\delta(x) \subset D$ stetig diff'bar und $J_f(x)$ regulär ist.
- **Umkehrabbildung:** $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \to \mathbb{R}^n$ regulär in $x \in D$. Dann gibt es eine offene Umgebung $V(x) \subset D$, die von f bijektiv auf eine offene Umgebung $U(y) \subset \mathbb{R}^n$ von $y := f(x)$ abgebildet wird. Die Umkehrabbildung $f^{-1} : U(y) \to V(x)$ ist ebenfalls regulär in y und für ihre Funktionalmatrix und Funktionaldeterminante gilt: $J_{f^{-1}}(y) = J_f(x)^{-1}, \quad |J_{f^{-1}}(y)| = |J_f(x)|^{-1}$
- **Lagrange-Multiplikatoren:** $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $F, g : D \to \mathbb{R}$ stetig diff'bar, weiter habe F in D ein lok. Extremum $\hat{x}$ mit $g(\hat{x}) = 0$. Ist weiter $\nabla g(x) \ne 0$, so gibt es $\lambda \in \mathbb{R}$, so dass: $\nabla F(x) = \lambda \nabla g(x)$. (Hinweis: lok. Extremum auf kompaktem D immer angenommen!, oder $\nabla F(\hat{x}) = 0, \hat{x} \in D$)
- **Jordan-Inhalt:** $\mathcal{S}$: Menge aller nicht überlappenden Intervallsummen $S := \bigcup_{k=1,..,n} I_k$ innerer/äußerer Inhalt: $|M|_i := \sup_{s \in \mathcal{S}, S \subset M} |S| \le \inf_{s \in \mathcal{S}, M \subset S} |S| =: |M|_a$. M **quadrierbar** $:\Leftrightarrow \quad |M|_i = |M|_a =: |M|$ bzw. $\forall \epsilon > 0 \exists S_\epsilon, S^\epsilon : |S^\epsilon| - |S_\epsilon| < \epsilon$ mit $S_\epsilon \subset M \subset S^\epsilon$ Für Würfelsummen M_k, M^k gilt: $|M|_i := \lim_{k \to \infty} |M_k|, \quad |M|_a := \lim_{k \to \infty} |M^k|$ für beschr. $M, N \in \mathbb{R}^n$: $|M_a| = |\overline{M}|_a, \quad |M|_i = |M^o|_i, \quad |M \cup N|_a \le |M|_a + |N|_a, \quad M^o \cap N^o = \varnothing \Rightarrow |M \cup N|_i \ge |M|_i + |N|_i$ ('=' für quadr. Mengen)
Nullmenge $:\Leftrightarrow \quad |M|_a = 0$ Für Nullmengen N gilt: $X \subset N$ ist NM, $\bigcup_{i < \infty} N_i$ ist NM, endliche Mengen sind NM beschr. $M \subset \mathbb{R}^n$ mit M Teilmenge von Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$ ist NM $M \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, $f : M \to \mathbb{R}$ stetig $\Rightarrow G(f) := \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in M\}$ ist $n+1$-dim. NM. M beschr. ist quadrierbar $\Leftrightarrow \partial M$ NM. M quadrierbar $\Rightarrow |M| = |M^o| = |\overline{M}|$. $M, N \subset \mathbb{R}^n$ quadr. $\Rightarrow M \cup N, M \cap N, M \backslash N$ quadr.
- $D \subset \mathbb{R}^n$ beschr., $f : D \to \mathbb{R}^n$ L-stetig $\Rightarrow |f(D)|_a \le \alpha |D|_a, \quad \alpha := (L\sqrt{n})^n$
$D \subset \mathbb{R}^n$ offen quadr. $f : \overline{D} \to \mathbb{R}^n$ L-stetig auf $\overline{M}$, regulär auf D, d.h. stetig diff'bar mit $\det J_f(x) \ne 0 \Rightarrow f(D)$ offen quadr. mit $\overline{f(D)} = f(\overline{D}), \quad \partial f(D) \subset f(\partial D) \quad f$ injektiv $\Rightarrow \quad \partial f(D) = f(\partial D)$
- **R-Integral:** $D \subset \mathbb{R}^n$ quadrierbar, $f : D \to \mathbb{R}$ bschränkt. f R-intergierbar $:\Leftrightarrow \sup_{Z \subset \mathcal{Z}(D)} \underline{S}_Z =: \underline{\int}_D f(x)dx = \int_D f(x)dx = \overline{\int}_D f(x)dx := \inf_{Z \subset \mathcal{Z}(D)} \overline{S}_Z \quad \Leftrightarrow \quad \forall \epsilon > 0 \exists Z_\epsilon \in \mathcal{Z}(D) : \overline{S}_{Z_\epsilon}(f) - \underline{S}_{Z_\epsilon}(f) < \epsilon$
- **Rotationskörper:** Randfunktion $\varphi(z), z \in [a,b] \quad \Rightarrow \quad |D_\varphi| := \pi \cdot \int_a^b \varphi z^2 dz$
Fubini: $I_x \in \mathbb{R}^n, I_y \in \mathbb{R}^m$ kompakte Intervalle, $I := I_x \times I_y$, f R-integrierbar auf I, Für $x \in I_x$ ($y \in I_y$) sei $f(x, \cdot)$ ($f(\cdot, y)$) integrierbar über I_x (I_y). Dann ist: $\int_I f(x,y)d(x,y) = \int_{I_x} \int_{I_y} f(x,y)dxdy = \int_{I_y} \int_{I_x} f(x,y)dydx$
- **charakt. Funktion** A Menge: $\chi_A(x) := \{1 : x \in A / 0 : \text{sonst}\}$. $\int_D \chi_A(x)dx = |A|$
- $D \subset \mathbb{R}^n$ quadr., f R-int., $m \le f(x) \le M, x \in D$, $\varphi : [m, M] \to \mathbb{R}$ L-stetig $\Rightarrow (\varphi \circ f)$ R-int. $\Rightarrow f, g$ R-int. $\Rightarrow |f|, f_+, f_-, fg, \max\{f,g\}, \min\{f,g\}$ R-int. $\quad N$ NM, f beschr. $\Rightarrow \int_N f(x)dx = 0$
- $D \subset \mathbb{R}^n$ quadr., f beschr. und überall bis auf NM N stetig $\Rightarrow f$ R-int.
- **Schrankensatz:** $D \subset \mathbb{R}^n$ quadr., f R-int. mit $m \le f(x) \le M, x \in D \Rightarrow m|D| \le \int_D f(x)dx \le M|D|$.
Mittelwertsatz: $D \subset \mathbb{R}^n$ quadr., f R-int. $\Rightarrow \exists \mu \in \mathbb{R}$ mit $\inf_{x \in D} f(x) \le \mu \le \sup_{x \in D} f(x)$, so dass: $\int_D f(x)dx = \mu|D|$. Ist zus. D kompakt, dann $\exists \xi \in D : \mu = f(\xi)$

Reihen/Konvergenzen: $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{c} = 1 \quad \forall c > 0$; $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$; $\lim_{k \to \infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = e$; $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{n} \to \infty$; $\sum_{k=1}^\infty x^k = \frac{1}{1-x} \; \forall |x| < 1$; $\sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln(2)$; $\sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{1}{4}\pi$; $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$; $\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x)-1}{x} = 0$;

Ableitungen: $\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$; $\cot'(x) = \frac{-1}{\sin^2(x)}$; $\ln'(x) = \frac{1}{x}$; $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$; $\frac{d}{dx} a^x = a^x \cdot \ln(a)$;

Integrale: $\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C$; $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$; $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$; $\int \sin(x)dx = -\cos(x) + C$; $\int \cos(x)dx = \sin(x) + C$; $\int \frac{dx}{\cos^2(x)} = \tan(x) + C$; $\int \frac{dx}{\sin^2(x)} = -\cot(x) + C$; $\int \frac{dx}{\sqrt{1-y^2}} = \arcsin(x) + C$; $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \arctan(x) + C$; $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln(ax+b) + C$ $\int \frac{a}{(x+a)^n} dx = \frac{1}{(1-n)(x+a)^{n-1}} + C$ $\int \frac{x}{x^2+a^2} dx = \ln(x + sqrtx^2 + a^2) + C$ $\int \frac{x}{(x+a)^n} dx = \frac{1}{2(1-n)(x^2+1)^{n-1}} + C$ $\int \frac{x \cdot dx}{a^2 \pm x^2} = \pm\frac{1}{2} \ln(a^2 \pm x^2) + C$ $\int \frac{dx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2\sqrt{ax+b}}{a} + C$ $\int \frac{x \cdot dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \sqrt{a^2+x^2} + C$ $\int \frac{x \cdot dx}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}} = -\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}} + C$ $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln(x + \sqrt{a^2+x^2}) + C$ $\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$; $\int_a^b f(\varphi(y))\varphi'(y)\,dy = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx$

Integral-Transf.: *Polar:* $(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ $dx = r \cdot drd\theta$, *Zylinder:* $(x,y,z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z)$ $dx = r \cdot drd\theta dz$,
Kugel: $(x,y,z) = (r\cos\theta\sin\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\varphi)$ $dx = r^2 \sin\varphi \cdot drd\theta d\varphi$, $0 \le \varphi \le \pi$